CERE

CERE Working Paper, 2015:15

Studentens Ultimata Guide till Cost-Benefit-Analys

Per-Olov Johansson*, Handelshögskolan i Stockholm
Karl-Gustaf Löfgren*, Umeå Universitet

*Centre for Environmental and Resource Economics
Umeå School of Business and Economics
Umeå University, Sweden

December, 2015

The **Centre for Environmental and Resource Economics** (CERE) is an inter-disciplinary and inter-university research centre at the Umeå Campus: Umeå University and the Swedish University of Agricultural Sciences. The main objectives with the Centre are to tie together research groups at the different departments and universities; provide seminars and workshops within the field of environmental & resource economics and management; and constitute a platform for a creative and strong research environment within the field.

SLU

UMEÅ UNIVERSITET

Department of Economics, Umeå University, S-901 87, Umeå, Sweden

www.cere.se

December 2015

Studentens Ultimata Guide till Cost-Benefit-Analys[1]

Per-Olov Johansson Handelshögskolan i Stockholm

Karl-Gustaf Löfgren Umeå Universitet.

[1] Författarna vill tacka Riksbankens jubileumsfond (RS10-1319:1) för forskningsanslag.

Introduktion till Studentens Ultimata Guide till Cost-Benefit-Analys

Cost-benefit-analys (CBA) erbjuder en formell ansats för att skatta kostnader och intäkter för olika ekonomisk politiska verksamheter och kan därmed bidra med användbar information för beslutsfattande. Den begreppsmässiga underbyggnaden för CBA kan härledas till den franske ingenjören och ekonomen Jules Dupuit, se Dupuit (1844). Den mer tillämpade användningen av CBA fick anstå till 1900-talet. Driven av en kraftig utbyggnad av vattenkraften i USA och därmed förknippade skador i flera viktiga floder ingrep Kongressen med två viktiga "flood control acts" åren 1936 och 1944. Akten från 1936 avsåg "works of improvement" i ett 50-tal floder i USA. Mycket viktigt var att akten introducerade en ansats för att prioritera mellan projekt.

"The Federal Government should improve or participate in the improvement of navigable waters or their tributaries, including watersheds….for flood control if the benefits to whomsoever they may accrue are in excess of estimated costs".

Det senare är cost-benefit-analysens essens. En närbesläktad problematik är hur man ska mäta intäkter (fördelar) och vad som menas med att intäkter överskrider kostnaderna. Vilfred Pareto (1897) menade att ett projekt skall genomföras om åtminstone en enda individ får en bättre välfärd samtidigt som ingen individ får det sämre. Det låter sig sägas men kriteriet är sällan eller aldrig uppfyllt i verkligheten, eftersom projekt tenderar att skapa både vinnare och förlorare. John Hicks (1939) och Nicolas Kaldor (1939) valde av den anledningen att introducera en kompensationsprincip som en praktisk regel för att bedöma ekonomiska projekt. Hicks-Kaldor-principen innebär att vinnarna, åtminstone hypotetiskt, skall kunna kompensera förlorarna. Man kan då tala om en *hypotetisk* Pareto-förbättring. Likväl innehåller principen ett starkt etiskt antagande, nämligen att möjligheten att kompensera, utan att genomföra en reell kompensation, är tillräcklig för att motivera projektet.

I verkligheten kan ett projekt gynna individer med hög välfärd medan individer länge ner på välfärdsstegen förlorar på projektet. Detta skulle kunna innebära att individerna av rättviseskäl skall viktas efter något kriterium, där de som ligger lågt på välfärdsstegen viktas högre. För att jämföra med Hicks-Kaldor-kriteriet kan två individer A och B, där A vunnit 10 kronor och B förlorat 8 kronor, båda, *hypotetiskt*, få det bättre om A ger 1 krona till B. Om samhället tilldelar den mer välbeställde A en välfärdsvikt på t.ex. 0.4 och den relativt sett fattigare B en välfärdsvikt på 0.6 erhålls ett negativt resultat genom att det vägda utfallet blir 0.4x10 -0.6x8=-0.08, givet att *faktisk* kompensation inte genomförs. Vi rör os därmed mot det som kallas Arrows omöjlighetsteorem (från hans avhandling från 1951) som bevisar att det inte finns någon rimlig välfärdsfunktion som samtidigt satisfierar rimliga villkor (axiom). Teoremet gäller i en ordinal värld, där individers nyttor inte kan jämföras utan bara rangordnas. Med andra ord, välfärdsvikter är i den ordinala världen meningslösa. Om man tillämpar en strängare metrik, såsom kardinal mätbarhet, och tillåter interpersonella jämförelser öppnas upp för sociala välfärdsfunktioner (utöver olika former av dikaturer). Dessa möjliggör en tillämpad (praktisk) välfärdsekonomi, dvs. cost-benefit-analys. För en uttömmande och relativt tillgänglig (dvs. icke-axiomatisk) diskussion om egenskaper hos olika välfärdsfunktioner och hur sådana funktioner kan användas hänvisar vi läsaren till Boadway och Bruce (1984).

Vi har valt att avdela utrymme i början av boken för att diskutera dessa aspekter på beslutsfattande, därför att de är utomordentligt viktiga för CBA. Det bör också nämnas att ett aggregeringsproblem omfattar alla icke-diktatoriska beslutskriterier. Detsamma gäller andra empiriska utvärderingsmetoder. Även om vi vänder oss till kostnadseffektivitetsanalys, kostnadsnyttoanalys[2],

---

[2] I hälsoekonomi avser kostnadsnyttoanalys (cost-utility analysis) en kostnadseffektivitetsanalys där ett kvantitativt intäktsmått ersatts med en nyttofunktion, vanligen med hälsa som enda argument. I äldre svensk litteratur betecknas ibland en samhällsekonomisk analys/cost-benefit-analys (cost-benefit analysis) kostnadsnyttoanalys. För att undvika missförstånd undviker vi fortsättningsvis att använda termen kostnadsnyttoanalys.

ekonomisk effekt-analys, multikriterieanalys, eller någon annan form av utvärderingsmetod måste data förr eller senare aggregeras.

Under alla förhållanden har CBA erövrat nya domäner och nya applikationer har tillkommit sedan 1950-talet. Verktygen har använts för att analysera olika typer av offentliga projekt i Europa, Nordamerika, Australien och senare i ett flertal av tredje världens länder. För en historisk återblick på CBA i USA hänvisar vi till Zerbe Jr (2007), för Australien är Dobs (2008) en bra referens och för UK hänvisar vi till Hanley och Spash (1993).

När det gäller "klassisk" teori hänvisar vi till Dreze och Stern (1987), Johansson (1993), Just et.al (2004) och Lesourne (1972, 1975). Dessa manualer är formella och kräver kunskaper i allmän jämviktsteori. Det finns emellertid också "kokböcker" som visar på hur man kan arbeta med CBA i verkligheten. Hit hör de Rus (2010), European Commission (2008), HM Treasury (2003), Pearce et.al. (2006) och amerikanska EPA (2010). Den underliggande välfärdsteorin är utomordentligt bred, men intressanta delar som berör CBA återfinns i Johansson (1991) medan andra mer tekniska framställningar ges av Boadway och Bruce (1984) och Mas-Colell et al. (1995).

Det finns många "hands-on manuals" som är användbara, men erfarenheten visar att alla utvärderingar medför oväntade teoretiska och empiriska överraskningar och utmaningar. Utvärderaren blir i allmänhet snabbt påmind om att hon behöver göra sina egna härledningar av CBA-regler. Vi hoppas att vi i den här manualen tillhandahåller några av de nyttiga teoretiska grunder som krävs vid praktiska utvärderingar, men förkunskapskravet är högre studier i nationalekonomi (C-nivå, men gärna en masterexamen eller doktorandstudier). Många av de gångbara tekniska verktygen som återfinns i boken förenklar förhoppningsvis livet för en välutbildad CBA-praktiker. Hit hör:

- Introduktion till nuvärdesteorin
- Enveloppegenskaper som enkelt ger partiella och generella cost-benefit-regler.
- Regler för såväl små som stora projekt.
- Cost-benefit-regler för naturresurser
- För- och nackdelar med Hicks-Kaldor-kriteriet.
- Konsumentöverskott och ekvivalent och kompenserande variation.
- Cost-benefit-analyser av miljöförändringar och marknadsmisslyckanden.
- Marginalkostnaden för allmänna medel och skatters överskottsbörda.
- Vägledning för valet av diskonteringsränta i empiriska studier.
- Cost-benefit-analyser av dynamiska Ramsey-modeller.
- Stokastiska dynamiska cost-benefit-regler under brownsk rörelse.
- Den nya investeringsteorin under osäkerhet.

Manualens tre första kapitel är medelsvåra medan det fjärde kapitlet innehåller optimal kontrollteori och stokastisk metoder som är relativt svårtillgängligt material. Vi försöker emellertid att förenkla stoffet så långt som möjligt utan att sopa svårigheterna under mattan. Ett antal härledningar har vi lagt i appendix.

KAPITEL 1

INTRODUKTION TILL NUVÄRDESTEORIN

Investeringsteorin handlar om principerna för intertemporalt val och avsikten här är att belysa några av teorins grunder, vilka i huvudsak handlar om beslutsregler för intertemporala val. Dessa beslutregler hjälper oss att välja vilka projekt, ur ett stort antal, som är lönsamma.

Som före detta skogsekonomer har vi funnit att den grundläggande teorin ofta misstolkats av skogsmän. De tror att skogen ska skötas enligt principer som är unika för skogbruket. Hela den skogekonomiska teorin har brottats med detta problem, även om Martin Faustmann och Max Robert Pressler redde ut de grundläggande principerna redan i mitten av 1800-talet. Vi gissar också att det i andra discipliner utanför nationalekonomin finns föreställningar som inte är baserade på *generella teoretiska principer* och därför resulterar i felaktiga val. Med generella principer menar vi bl.a. att investeringen är lönsam (olönsam) oberoende av vem som får till uppgift att genomföra den. Investeringsbeslutet skall således vara oberoende av investerarens preferenser (nyttofunktion). Detta brukar kallas för Fishers separationsteorem efter den amerikanske ekonomen Irving Fisher som var verksam i slutet av 1800-talet och i början av 1900-talet[3].

Generella principer uppstår därför att ett antal antaganden ligger i botten. Om dessa inte är uppfyllda talar man om imperfekta kapitalmarknader och då påverkas besluten av individers preferenser. Vad som är lite intressant är att det i ”viss utsträckning” ändå finns beslutsregler som under vissa omständigheter gör det möjligt att ignorera konsumentens preferenser. Vi ska försöka visa varför.

INVESTERINGSBESLUT I EN PERFEKT KAPITALMARKNAD

Låt oss anta att kreditmarknaden är perfekt i meningen att räntan är unik, och att varje konsument kan låna och spara vilken volym pengar som helst till samma ränta. Detta är naturligtvis en grov förenkling. Inte ens den (bank) som lånar och/eller sparar över natten i Sveriges riksbank kan uppnå en unik ränta. Utlåningsräntan är normalt 75 punkter[4] högre och inlåningsräntan normalt 75 punkter lägre än Riksbankens reporänta (http://www.riksbank.se/sv/Rantor-och-valutakurser/Forklaring-till-serierna/Riksbanksrantor/). Men förenklingen med en unik ränta har klara likheter med fullständig konkurrens. Få om ens någon har observerat marknadsformen fullständig konkurrens. Inte desto mindre är den ett utomordentligt användbart analysinstrument.

Med en investering avser vi en serie av positiva och icke positiva betalningar gjorda i olika tidpunkter. Låt oss anta att vi har två investeringar som leder till två olika betalningsströmmar över tidsperioden[5] $[1,T]$:

$$a=(a_1,a_2,...,a_T)$$
$$b=(b_1,b_2,...,b_T)$$

Under vilka villkor skulle två personer alltid välja samma investering givet att betalningsströmmarna skiljer sig åt ($a \neq b$)? (Det är inte en helt enkel fråga. Det påstås att Albert Einstein sagt att

[3] Se I. Fisher, The Theory of Interest, New York 1930, s. 138 ff.

[4] =0.75 % enheter.

[5] Notera att det inte spelar någon roll om en av betalningsströmmarna tar slut före T. Man kan då lägga till nollor för återstående perioder.

”Compound interest is the eighth wonder of the world. He who understands it, earns it ... he who doesn't ... pays it”.)

En investering borde ju i allmänhet innebära en omfördelning av konsumtionen över tiden. Om detta är sant är det inte säkert att båda personerna väljer samma investering. Men om konsumenternas inkomster över perioden är kända med säkerhet och om respektive individ genom sparande och lån till samma räntesats omfördelar konsumtionen över tiden, givet restriktioner kring nuvärden och framtida inkomst kan man visa att båda väljer den investering som ger det högsta nuvärdet. Skälet är att budgetrestriktionen (mängden) parallellförflyttas utåt i förhållande till utgångsläget om investeringen har ett positivt nuvärde. Om investeringen inte är lönsam parallellförflyttas den inåt i förhållande till utgångsläget. Den investering som står för den största parallellförflyttningen utåt av budgetrestriktionen kommer att väljas av båda konsumenterna, därför att den ger den största valmängden att välja ur. Om ingen av investeringarna har ett positivt nuvärde avstår båda konsumenterna från att investera.

Mer formellt, antag att konsumenten har nyttofunktionen

$$u = u(c_1, c_2, ..., c_T) \qquad (1.1)$$

Där c_t är konsumtionen i period t. I princip behöver vi bara anta att nyttofunktionen kan rangordna konsumtionsvektorerna. Inga antaganden som monoticitet eller kontinuitet är nödvändiga för argumentationen. Vi sammanfattar våra antaganden nedan:

ANTAGANDE 1.1

a) De framtida inkomsterna $y_t\ (t = 1, 2, ..., T)$ *är kända med säkerhet.*

b) Nettointäkterna a_t *från investeringarna är kända med säkerhet.*

c) Kapitalmarknaden är perfekt i meningen att lån och sparande sker till samma (real-)ränta i varje tidsperiod, betecknad r_t*, och räntan är känd med säkerhet.*

Under den första perioden får den investerande konsumenten kostnaden $a_1 < 0$ och inkomsten y_1, vilket gör att de reala nettointäkterna i den första perioden blir $y_1 - c_1 + a_1$. I slutet av den andra perioden kan nettointäkterna skrivas som[6]

$$(y_1 - c_1 + a_1)(1 + r_1) + (y_2 - c_2 + a_2)$$

En liknande process för $t = 3, ..., T$ ger

$$\begin{aligned}&(y_1 - c_1 + a_1)(1 + r_1)(1 + r_2)....(1 + r_T) + (y_2 - c_2 + a_2)(1 + r_3), ..., (1 + r_T) + .. \\ &+ (y_{T-1} - c_{T-1} + a_{t-1})(1 + r_T) + (y_T - c_T + a_T)\end{aligned} \qquad (1.2)$$

[6] Läsaren kanske oroas av att vi inte använder några priser på konsumtionen eller investeringarna. Det gör vi visst! Det fixas helt enkelt med lite ”sortförvandling” som gör alla priserna lika med ett. Tekniskt sker det genom att ändra enheterna (disaggregeras eller aggregeras) så att priset på en enhet blir ett.

Genom att lägga en restriktion att summan av alla nettointäkter är "icke negativ" (≥ 0), och dividera med $(1+r_1)(1+r_2)(1+r_3)...(1+r_T)$ får vi en budgetrestriktion som kan skrivas som

$$(y_1 - c_1 + a_1)R_1 + (y_2 - c_2 + a_2)R_2 + ...(y_T - c_T + a_T)R_T \geq 0 \tag{1.3}$$

där

$$R_1 = 1, R_2 = \frac{1}{1+r_2}, ..., R_T = \frac{1}{(1+r_2)(1+r_3)...(1+r_T)}$$

är diskonteringsfaktorer och r_t är realräntan (dvs. netto efter inflation) under period t. Budgetrestriktionen om individen inte investerar ger

$$(y_1 - c_1)R_1 + (y_2 - c_2)R_2 + ...(y_T - c_T)R_T \geq 0 \tag{1.4}$$

Den relevanta frågan är nu hur vi kan avgöra om investeringen lönar sig. Nuvärdet av konsumtionen, som vi här betecknar *C*, har en nedre gräns lika med noll och en övre gräns lika med

$$\sum_{t=1}^{T} (y_t + a_t)R_t.$$

Vi kan skriva

$$\sum_{t=1}^{T} (y_t + a_t)R_t \geq C \geq 0 \tag{1.5}$$

Motsvarande olikhet om konsumenten inte investerar är

$$\sum_{t=1}^{T} y_t R_t \geq C \geq 0 \tag{1.6}$$

Eftersom diskonteringsfaktorn inte beror på konsumtionen kommer den budgetrestriktion som ger den större valmängden att ha den högre övre gränsen, och vilken det är kan fastställas genom att subtrahera ekvation (1.6) från ekvation (1.5). Vi kan då dra slutsatsen att investeringsregimen är att *föredra om och endast om*

$$\sum_{t=1}^{T} a_t R_t > 0 \tag{1.7}$$

Således är investeringen värd att genomföra om (och endast om) dess nuvärde är positivt.

Internräntan och marknadsräntan

Ett annat sätt att undersöka om en investering är att föredra framför ingen investering är att använda sig av den s.k. internräntan. Definiera

$$K(r_1, r_2, ..., r_T) = \sum_{t=1}^{T} a_t R_t$$

Antag att räntan är konstant över planeringsperioden. Då kan vi skriva investeringens nuvärde som

$$K(r) = \sum_{t=1}^{T} a_t R_t > 0 \qquad (1.7a)$$

Slutligen introducerar vi antagandet att betalningarna är" icke negativa" så när som på den första betalningen[7] i period 1.

ANTAGANDE 1.2

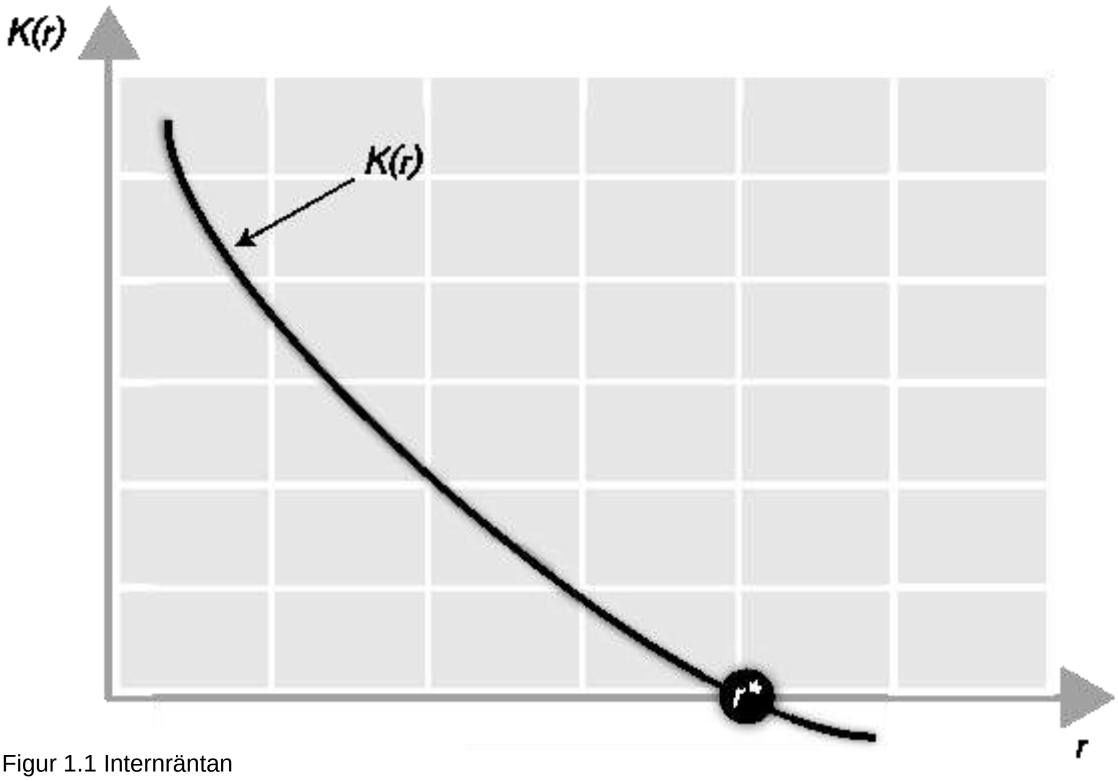
a) $a_1 < 0$

b) $a_2, a_3, ..., a_T \geq 0$

Funktionen $K(r)$ är avtagande i r, dvs. ju högre r är desto mindre är funktionens värde. Men

$$K_{-a_1}(r) = \sum_{t=2}^{T} a_r R_t > 0$$

vilket betyder att uttrycket kan göras godtyckligt litet genom att välja en tillräckligt hög ränta. Om $K_{-a_1}(r^*) = a_1$ är $K(r^*)$=0. Räntan r^* är unik och kallas internräntan (se figur 1.1).



Figur 1.1 Internräntan

Så länge som vi antar att penningräntan (dvs. r) är konstant över perioderna kan internräntan användas för att avgöra om en investering är lönsam eller inte. Kriteriet innebär att om internräntan är större än marknadsräntan, $r^* > r$, är projektet lönsamt. Orsaken är att vid en lägre ränta än r^* blir

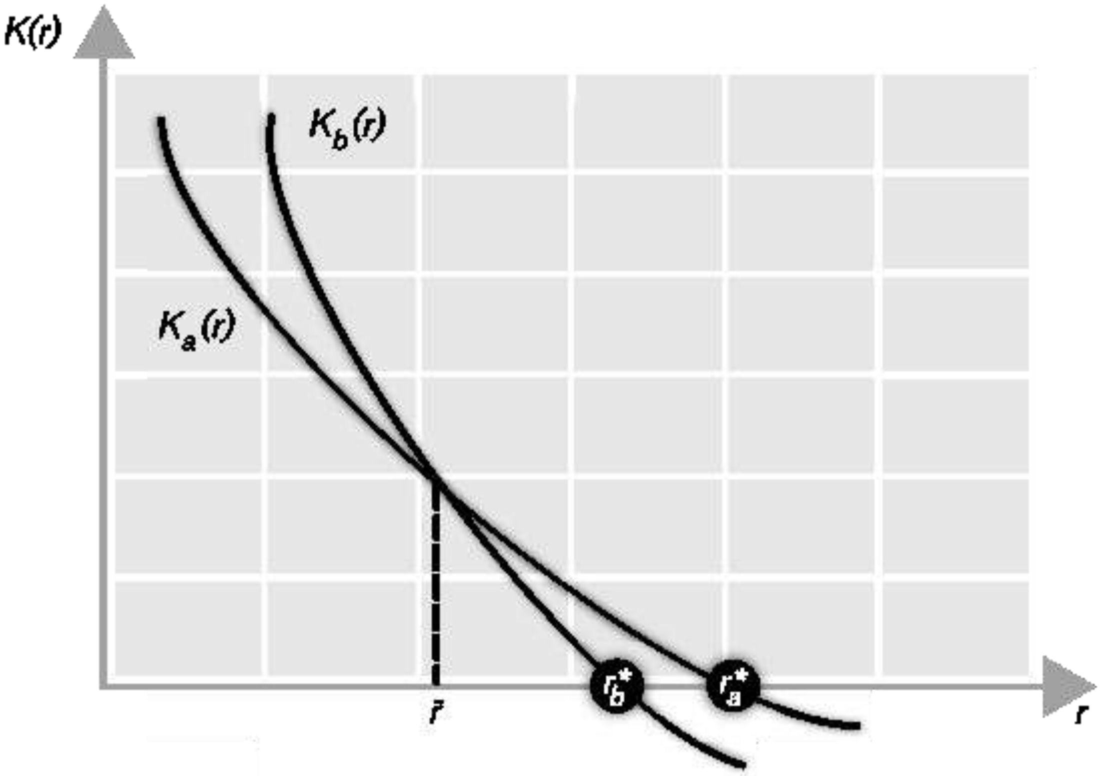
[7] Detta är inte nödvändigt, men negativa betalningar från period två och framåt ger flera positiva rötter.

nuvärdet positivt. Om marknadsräntorna varierar mellan perioderna kan man under i övrigt givna förutsättningar visa att om den period som har den högsta marknadsräntan $r_{\max}$ antas gälla för alla perioder och $r^* > r_{\max}$ är också investeringen lönsam.

Två investeringar kan rangordnas genom att se till tecknet på nuvärdet av differensinvesteringen:

$$K_{a-b} = \sum_{t=1}^{T}(a_t - b_t)R_t = K_a(r) - K_b(r) \tag{1.8}$$

och investering a är att föredra framför b om och endast om $K_a(r) > K_b(r)$. Däremot är det inte möjligt att generellt rangordna investeringar med hjälp av internräntan, dvs. $r_a^* > r_b^*$ betyder inte att investering a är att föredra framför b (se figur 1.2).



Figur 1.2 Varför internräntan inte kan rangordna investeringar

I figuren gäller just att $r_a^* > r_b^*$, men om marknadsräntan är lägre än $\bar{r}$ i figuren är investering b att föredra framför a.

Slutsats 1 *(Fishers separationsteorem) Givet antagande 1.1 kan två investeringar alltid rangordnas med hjälp av deras nuvärden. Skälet är att den investering som har det högsta nuvärdet ger upphov till den större budgetmängden. Det är alltid bättre att genomföra en investering med ett positivt nuvärde än att avstå från den.*

Slutsats 2 *(Norstroms regel) Givet antagandena 1.1 och 1.2 och en över investeringsperioden konstant ränta är en investering med den unika internräntan $r^* > r$ lönsam (dvs. bättre att genomföra än att avstå från).*

Slutsats 3 *Antagandena 1.1 och 1.2 räcker inte för att säkerställa att en investering a med internränta* $r_a^* > r_b^*$ *skall rangordnas före (vara lönsammare än) en investering b. Däremot gäller att om räntan varierar under investeringsperioden, och* $r_a^* > r_{\max}$ *så är investeringen lönsam att genomföra.*

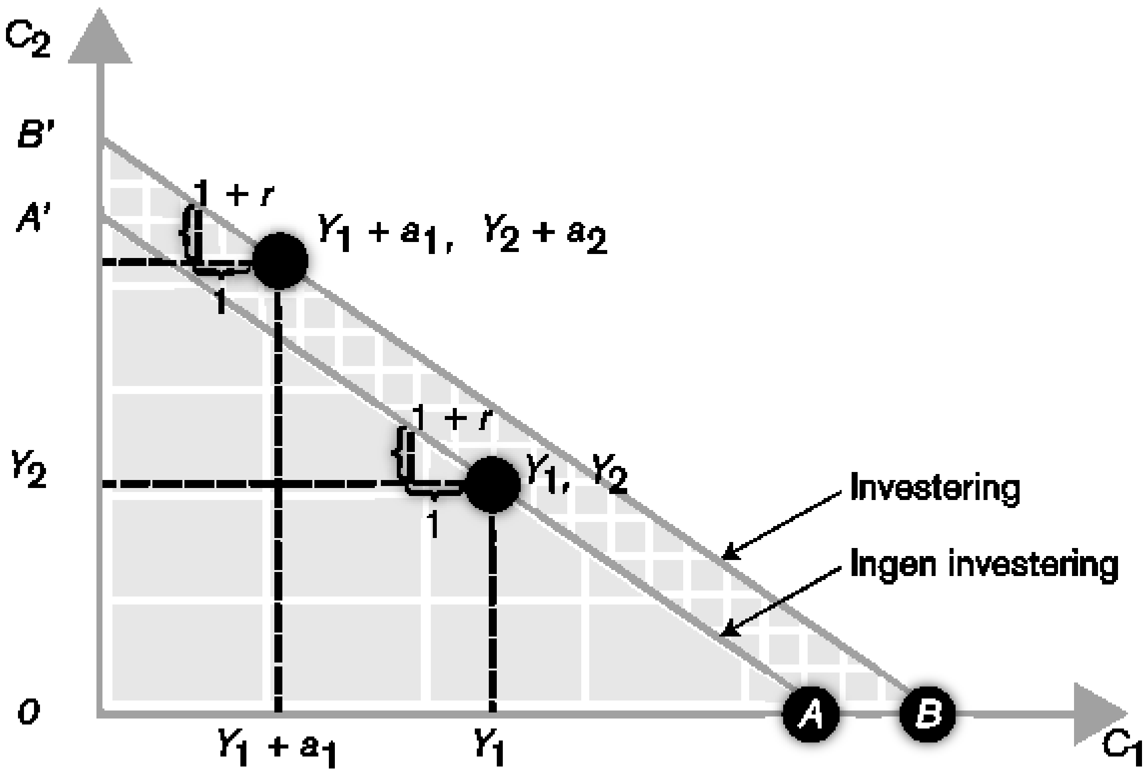
Fishers separationsproblem är enkelt att illustrera i fallet med två perioder. Budgetrestriktionen utan investering kan skrivas[8]:

$$c_2 = y_2 + (y_1 - c_2)(1+r)^{-1}$$

Om investeringen genomförs (a_1, a_2) får budgetsrestriktionen följande utseende

$$c_2 = y_1 + a_1 - c_1 + (y_2 + a_2 - c_2)(1+r)^{-1}$$

där det antas att $a_1 < 0$ och $a_2 > 0$. Båda budgetlinjerna är dragna i figur 1.3.



Figur 1.3 Valmängderna i tvåperiodfallet

Eftersom lutningen på de två budgetlinjerna är densamma, $dc_2/dc_1 = -(1+r)$, kan storleken på valmängderna antingen jämföras på ordinatan i origo ($c_1 = 0$) eller på abskissan i origo ($c_2 = 0$). Skillnaderna i koordinater mellan punkterna $B' - A' = a_1(1+r) + a_2 = K(r)(1+r) \quad (c_1 = 0)$ och $B - A = a_1 + a_2(1+r)^{-1} = K(r) \quad (c_2 = 0)$. De utgör båda nuvärden men det förra mäts i period två

[8] Vi antar att konsumentens optimala konsumtionsval ligger på budgetlinjen.

och det senare i period ett. Naturligtvis kan jämförelsen i det generella fallet med T perioder göras i vilken som helst av perioderna[9].

INVESTERINGSBESLUT DÅ KAPITALMARKNADEN ÄR IMPERFEKT

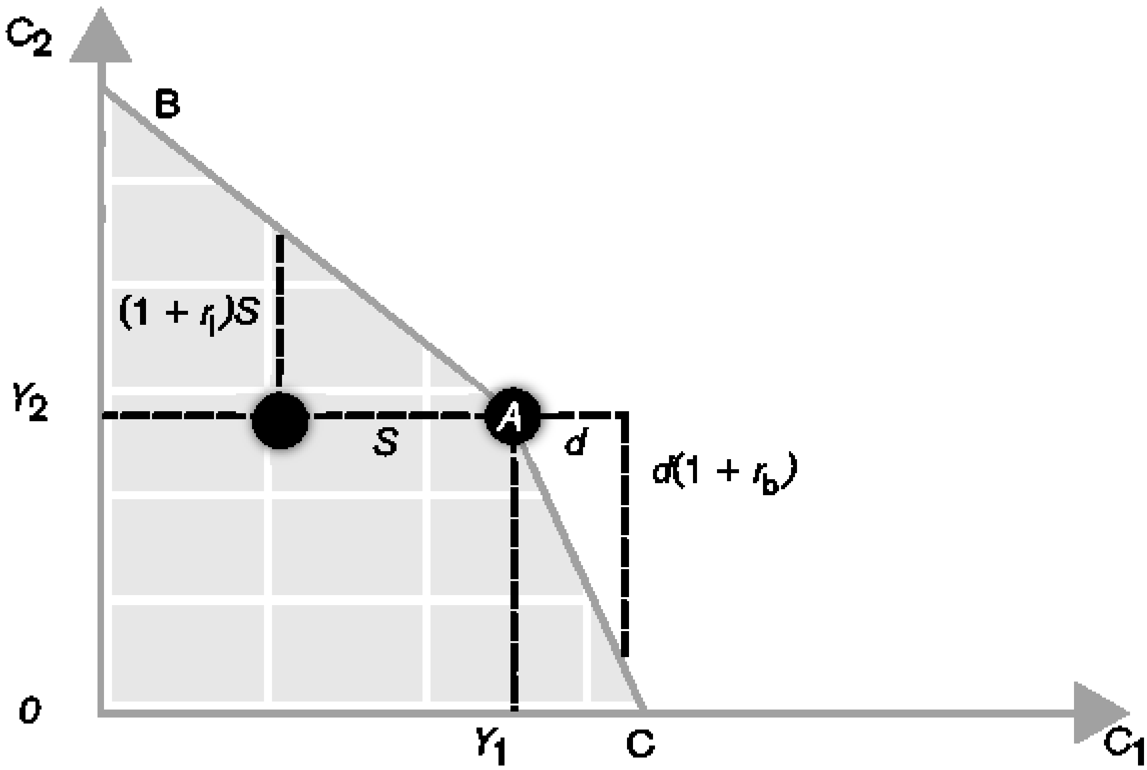
Ett mycket enkelt och realistiskt sätt att införa en imperfekt kapitalmarknad är att göra som riksbanken och alla andra banker, nämligen att låta låneräntan vara högre än sparräntan.

ANTAGANDE 1.3

Kapitalmarknaden är imperfekt genom att låneräntan är högre än sparräntan. Båda räntorna är kända med säkerhet och konstanta över tiden.

Den senare egenskapen är tillagd för att möjliggöra en situation där Fishers separationsteorem kan gälla och samtidigt förstås. När kapitalmarknaden är imperfekt är nuvärdet av konsumtionen inte väldefinierat. Orsaken är att nuvärdet av inkomstströmmen över tiden beror på konsumtionsmönstret. Blandningen av lån och sparande växlar över tiden och påverkar nettovärdet av inkomsterna, därför att sparräntor och låneräntor är olika.

För att illustrera investeringsproblemet på en imperfekt kapitalmarknad ska vi använda en modell med två perioder. I figur 1.4 nedan mäts realvärdet av konsumtionen under den första perioden längs den horisontella axeln och andra perioden mäts längs den vertikala axeln.



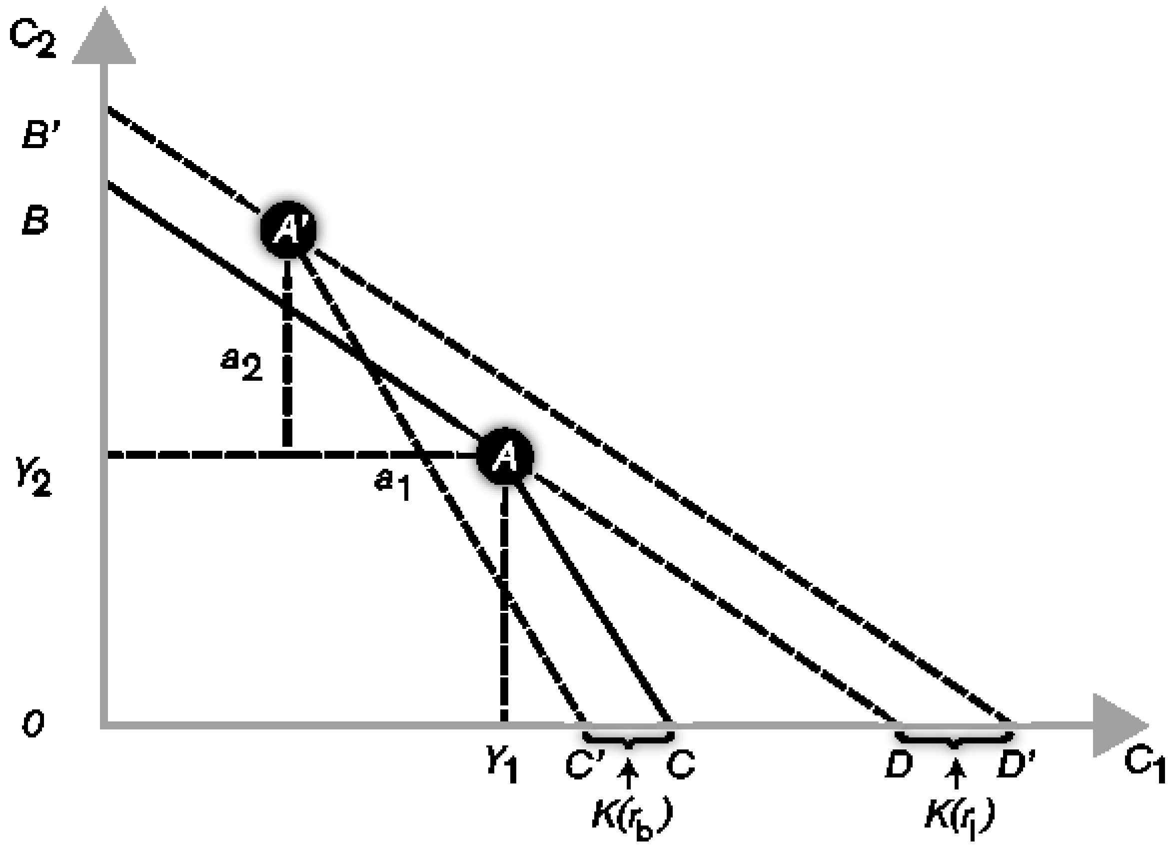
Figur 1.4 Valmängderna i en imperfekt kapitalmarknad

Punkt A i diagrammet ger konsumtionsmöjligheterna när varken lån, sparande eller investeringar är möjliga. Konsumtionen i en period är då lika med periodens inkomst. Om vi tillåter sparande under den första perioden, kommer konsumenten att i den andra perioden ha sparat $(1+r_s)s$, där s är

[9] Läsaren kan försöka rita tredimensionella plan som ligger "parallellt över varandra". Det är inte lätt.

sparandet och r_s är sparräntan. Sparandet följer alltså linjesegmentet AB. Om individen istället hade valt att konsumera mer i den första perioden än inkomsten i samma period hade han tvingats låna $d = c_1 - y_1$ till låneräntan r_b och därmed fått återbetala $d(1 + r_b)$ i den andra perioden.

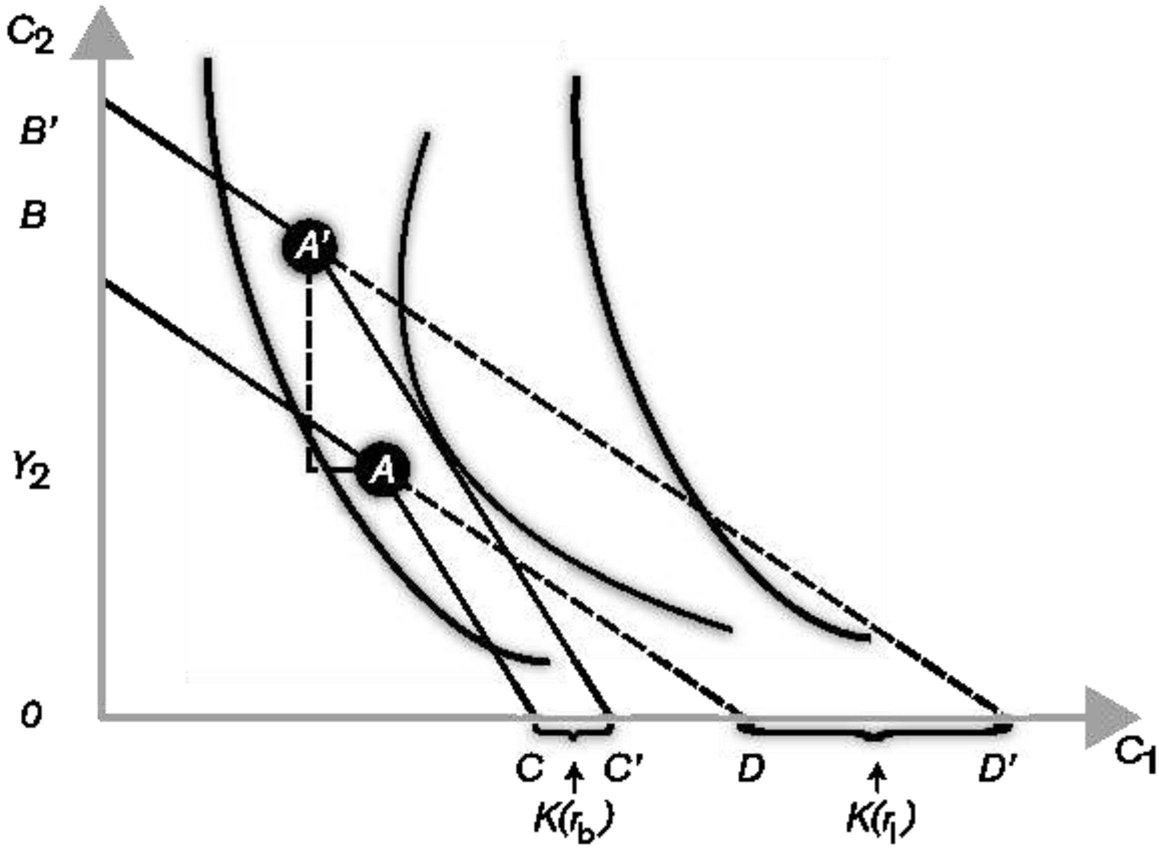
Genom att applicera samma resonemang som i fallet utan investeringar innebär frånvaron av spar- och lånemöjligheter att konsumenten hade tvingats konsumera $(y_1 + a_1, y_2 + a_2)$ i punkten $A^{'}$ i figur 1.5.



Figur 1.5 Valmängder vid investering som inte är "objektivt att föredra"

Om konsumenten tillåts låna eller spara kommer valmängden att bestå av den knäckta linjen $B^{'}A^{'}C^{'}$ och ytan under den. Genom att den knäckta linje BAC och ytan därunder har områden där valen utan investering är att föredra framför en investering och vise versa kan vi alltså inte objektivt rekommendera en investering. Konsumentens preferenser avgör huruvida en investering är att föredra eller inte.

Under vilka förhållanden är det möjligt att objektivt rangordna två eller flera investeringar på en imperfekt kapitalmarknad? Matematiskt kan man säga att investering är att föredra framför en annan när valmängden för den alternativa investeringen är en äkta delmängd till den föreslagna investeringens valmängd. För enkelhets skull kan vi låta alternativinvesteringen vara ingen investering $(0,0)$, medan den föreslagna investeringen har betalningsströmmen (a_1, a_2). I figur 1.6



Figur 1.6 En investering i en imperfekt kapitalmarknad som är objektivt lönsam

är skillnaden mellan koordinaterna $C^{'}$ och C lika med

$$K(r_b) = a_1 + \frac{a_2}{1 + r_b} > 0 \tag{1.9}$$

Detta är nuvärdet av investeringen vid låneräntan. Differensen mellan koordinaterna $D^{'}$ och D är

$$K(r_s) = a_1 + \frac{a_2}{1 + r_s} > 0 \tag{1.10}$$

dvs. investeringen utvärderad med sparräntan. Och eftersom sparräntan är lägre än låneräntan är naturligtvis detta värde också positivt och att investera är att föredra framför att inte investera. Här kan problemet verka trivialt, men om vi har fler än två perioder kan investeringen kopplas till både sparräntor, låneräntor och valet av konsumtion. Om diskontering inte sker i den första perioden återstår 2^{T-1} möjliga nuvärden (två värden på räntan är möjliga i samma period) när vi har T perioder. Om alla dessa värden är positiva säger intuitionen att investeringen objektivt är att föredra framför ingen investering. Det är en korrekt intuition och vi skissar nu härledningen av detta resultat som först bevisades av Tönu Puu (1964)[10] i vederbörandes doktorsavhandling.

Nuvärdet av en investering mäter skillnaden mellan de övre gränserna för nuvärdena av konsumtionen när investeringen jämförs med att avstå ifrån att investera. Om de 2^{T-1} möjliga

[10] Gordon Pye publicerade oberoende av Puu samma problem (1966).

nuvärdena av investeringen inte är negativa innebär det att den minsta övre gränsen är större under en investeringsregim än i frånvaro av investering oberoende av konsumtionsmönstret över tiden. Det innebär också att alla konsumtionsmönster som är möjliga när man avstår ifrån att investera också är möjliga under investeringsregimen. Tillräcklighet är därmed bevisad.

Om det däremot det finns minst ett negativt nuvärde för investeringen kan man finna konsumtionsvektorer som är möjliga när man inte investerar men inte möjliga om man investerar. Därmed har vi visat att positiva nuvärden är nödvändiga.

Självklart kan ett likartat argument appliceras på en differensinvestering $a-b$, alternativet är här åter ingen investering.

Slutsats: (*Puus och Pyes Teorem*) *Givet antagande 1.1 med en imperfekt kapitalmarknad kan två investeringar objektivt rankas med hjälp av nuvärdeskriteriet om och endast om samtliga* 2^{T-1} *möjliga kapitalvärden för differensinvesteringen är positiva.*

Naturligtvis kan kapitalmarknaden vara imperfekt även av andra skäl än ovanstående, men det är en annan "sak".

DEFINITION AV EN KONTINUERLIG DISKONTERINGSFAKTOR

De nuvärden som beräknas när man använder sig av diskonteringsfaktorerna $R_1, R_2, ..., R_T$, där $R_t = (1+i)^{-t}$ och i nu får beteckna den diskreta (till skillnad från kontinuerliga) räntan, är naturligtvis fullt hanterbara, men i teoretiskt arbete kan det underlätta om man arbetar i kontinuerlig tid och då behöver man en kontinuerlig diskonteringsfaktor. Relationen mellan en kontinuerlig diskonteringsfaktor e^{-rt} och den diskreta diskonteringsfaktorn $[(1+i)^t]^{-1} = R_t$ kan förstås med hjälp av följande resonemang[11]: Antag att vi studerar en tidsperiod på ett år som är uppdelad i n delperioder. Om den kontinuerliga räntan är r, är den intjänade räntan över en period av storleken n^{-1} lika med r/n. I slutet av året kommer en krona (som investeras i början av året) att vara värd

$$v = (1+\frac{r}{n})^n = [(1+\frac{r}{n})^{n/r}]^r = [1+\frac{1}{N})^N]^r \tag{1.11}$$

där $N = n/r$ och man kan visa att

$$\lim_{N\to\infty}[(1+\frac{1}{N})^N]^r = e^r$$

där e är basen för den naturliga logaritmen och gränsvärdet (limes) betecknas lim. Den kontinuerliga räntan r kan därför jämföras med $e^r = (1+i)$, vilket innebär att om båda leden logaritmeras så erhålls[12] $r\ln e = r = \ln(1+i)$. Om vi har en kontinuerlig betalningsström $a(t)$ på intervallet [0,T] kan vi skriva nuvärdet av denna betalningsström som

$$PV^c = \int_0^T a(t)e^{-rt}dt$$

[11] *e* är basen för den naturliga logaritmen. Den har fått namnet efter en av de största matematikerna genom tiderna Leonhard Euler 1707-1783. Han producerade matematik trots en begynnande blindhet .

[12] Notera att $\ln e = 1$.

till skillnad från den diskreta betalningsströmmen $(a_1, a_2, ..., a_T)$ som i nuvärde när vi även diskonterar den första betalnigen a_1 har utseendet

$$PV = \sum_{j=1}^{T} \frac{a_j}{1+i} \ .$$

Om *r* varierar över tiden kan vi skriva den kontinuerliga diskonteringsfaktorn som

$$R(t) = \int_0^t r(\tau) d\tau$$

och

$$PV^c = \int_0^T a(t) e^{-R(t)} dt \ .$$

Vi avslutar med ett användbart specialfall. Om en obligation med oändlig löptid ger en konstant årlig avkastning a kan vi skriva nuvärdesformeln på två olika sätt och få samma resultat:

$$PV^c = \int_0^\infty a e^{-rt} dt = [-\frac{a}{r} e^{-rt}]_0^\infty = \frac{a}{r} \qquad \text{(integration som ger primitiv funktion } [-\frac{a}{r} e^{-rt}]\text{)} \tag{1.12}$$

och

$$PV = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{a}{1+i} = \frac{a(1+i)^{-1}}{1-(1+i)^{-1}} = \frac{a}{i} \qquad \text{(oändlig serie med kvot } (1+i)^{-1}\text{)} \tag{1.13}$$

dvs. om räntan är densamma och tidshorisonten oändlig så ger kontinuerlig och diskret tid samma nuvärde[13]. Nuvärdet är dessutom mycket enkelt att beräkna i dessa specialfall. Nedan kommer vi att använda oss av båda skrivsätten.

[13] Om vi inte diskonterar den första betalningen i (1.13) blir nuvärdet $a(1+i)/i$.