KAPITEL 4
DYNAMISKA COST-BENEFIT-ANALYSER I KONTINUERLIG TID[53]

COST-BENEFIT-ANALYS I EN DYNAMISK RAMSEY-MODELL[54]

Vi ska i detta kapitel introducera en dynamisk allmän jämviktsmodell med två typer av kapitalbestånd, vanligt realkapital och ett bestånd som består av ackumulerade icke önskvärda utsläpp. Modellen formuleras både under säkerhet och osäkerhet och i kontinuerlig tid. Den momentana nyttofunktionen under säkerhet har formen:

$$u = u[c(t), x(t)] \tag{4.1}$$

där $c(t)$ är konsumtionen per capita i tidpunkt t och $x(t)$ är de ackumulerade utsläppen per capita. Nyttan växer med ökad konsumtion medan de ackumulerade utsläppen minskar nyttan. Ekonomins produktionsfunktion har formen:

$$y(t) = f[k(t), g(t)] \tag{4.2}$$

där $y(t)$ är produktionen per capita, $k(t)$ är kapitalstocken per capita och $g(t)$ är flödet av utsläpp per capita, vilket kan tolkas så att företaget använder energi som insatsvara och denna ger (efter "omskalning") upphov till lika stora utsläpp. Produktionen växer i båda argumenten. Differentialekvationen för de ackumulerade utsläppen är:

$$\dot{x}(t) = g(t) - \alpha x(t) \tag{4.3}$$

$$x(0) = x_0$$

Här är $\dot{x}(t) = dx(t)/dt$ derivatan av de ackumulerade utsläppen, och 0< $\alpha < 1$ är en parameter som står för den assimilerande kapaciteten hos miljön/atmosfären, dvs. är en deprecieringsfaktor, som dock kan påverkas av samhället; se nedan. Parametern x_0 ger storleken på de ackumulerade utsläppen vid tidpunkten noll. Denna parameter behövs för att lösa differentialekvationen. Tillväxten av kapitalstocken över tiden $\dot{k}(t) = dk(t)/dt$ drivs av differentialekvationen

$$\dot{k}(t) = f[k(t), g(t)] - c(t) - I(\alpha) \tag{4.4}$$

$$k(0) = k_0$$

där $I(\alpha)$ är kostnaden att upprätthålla nivån på deprecieringsfaktorn för de ackumulerade utsläppen, mätt i produktionsenheter per capita. Det samhällsekonomiska allmänna jämviktsproblemet som ska lösas av en social planerare har formen

---

[53] Kapitlet bygger på bl.a Aronsson, Löfgren och Backlund (2004), Dixit och Pindyck (1993) och Öksendal (2005)

[54] Frank Plumpton Ramsey (1903-1930) var en engelsk matematiker och filosof verksam i Cambridge (England) som skrev tre artiklar med nationalekonomiskt innehåll. Alla tre var banbrytande och en av dem rörde ett problem som liknar ovanstående. Ramsey använde modellen för att optimera individens sparande. Problemet försvårades av att han antog (av etiska skäl) att nyttodiskonteringsräntan var noll. Han var "kompis" med John.M. Keynes, Bertrand Russell och Ludvig Wittgenstein. Han dog alldeles för ung av en njursjukdom.

$$\underset{c(t),g(t)}{Max}\int_0^\infty u(c(t),x(t))e^{-\theta t}dt \qquad (4.5)$$

med restriktionerna

$$\dot{k}(t) = f[k(t),g(t)] - c(t) - I(\alpha) \qquad (4.6)$$

$$\dot{x}(t) = g(t) - \alpha x(t)$$

$$k(0) = k_0 > 0$$
$$x(0) = x_0 > 0$$

$$\lim_{t\to\infty} k(t) \geq 0$$
$$\lim_{t\to\infty} x(t) \geq 0$$

Diskonteringsfaktorn är $e^{-\theta t}$ där θ är nyttodiskonteringsräntan och inte penningräntan. Gränsvärdena i (4.6) "behövs" för att hålla kapitalstockarna positiva. Lösningen på detta problem kan – precis som i en statisk modell eller en dynamisk modell i diskret tid – skrivas som en optimal värdefunktion under restriktioner som i "huvudsak" består av två differentialekvationer av första ordningen och deras startvärden. Den optimala värdefunktionen blir:

$$V^*(\Theta,k_0,x_0) = \max_{c(t),g(t)}\int_0^\infty u(c(t),x(t))e^{-\theta t}dt = \int_0^\infty u(c^*(t),x^*(t))e^{-\theta t}dt \qquad (4.7)$$

Här är $\Theta = (\theta,\alpha)$ en parametervektor. Den optimala konsumtionen över tiden är $c^*(t)$ och de ackumulerade utsläppen är $x^*(t)$. En cost-benefit-regel kan också här uppfattas som den partiella derivatan med avseende på parametern α. Denna är som synes inte direkt synlig i den optimala värdefunktionen, vilket leder till en "mindre komplikation". Vi skall börja med att hantera denna komplikation genom att införa en funktion som kallas Hamilton-funktionen och är starkt knuten till optimeringsproblemet[55]. Hamilton-funktionen har utseendet:

$$H(t) = u[c(t),x(t)]e^{-\theta t} + \lambda(t)\{f[k(t),g(t)] - c(t) - I(\alpha)\} + \mu(t)\{\ g(t) - \alpha x(t)\} = \qquad (4.8)$$

$$= u[c(t),x(t)]e^{-\theta t} + \lambda(t)\dot{k}(t) + \mu(t)\dot{x}(t)\}$$

Som framgår innehåller Hamilton-funktionen nyttofunktionen vid tidpunkten *t diskonterad till nuvärde.* Därutöver innehåller den rörelseekvationen för kapitalstocken och motsvarande rörelseekvation för de ackumulerade utsläppen multiplicerade med något som ser ut som Lagrange-multiplikatorer. De senare kallas för adjoint-variabler[56], co-state-variabler eller skuggpriser, därför att de samvarierar med

---

[55] Hamilton-funktionen bär namnet efter William Rowan Hamilton (1805-1865) som var en irländsk astronom och matematiker. Hamilton-funktionen är en del av den *hamiltonska principen*, som sammanfattar mekanikens lagar i formler som var nya när det begavs sig. Han dog av gikt.

[56] I den klassiska Hamiltonska fysiken är en "adjoint-variable" ett kanoniskt (mönstergillt) konjugat p tolkat som ett generaliserat moment. Det betyder att variabeln är dual till en annan variabel.

tillståndsvariablerna $k(t), x(t)$. Om vårt problem är löst, dvs. att värdefunktionen är optimerad, gäller följande resultat:

$$H^*[c^*(t), g^*(t), k^*(t), x^*(t), \lambda(t), \mu(t); \Theta] = \theta \int_t^{\infty} u(c^*(s), x^*(s)) e^{-\theta(s-t)} ds = \theta V(\Theta, k_0, x_0) \quad (4.9)$$

Med ord, Hamilton-funktionen är direkt proportionell mot värdefunktionen där nyttodiskonteringsfaktorn utgör en proportionalitetsfaktor. Detta resultat följer som ett specialfall av den s.k. Hamilton-Jacobi-Bellman-ekvationen (HJB) men kan också härledas på annat sätt[57] . Det gäller också att den optimala värdefunktionens partiella derivata med avseende på tillståndsvariablerna vid starttidpunkten, här *t*, är lika med respektive co-state-variabels värde i starttidpunkten:

$$\frac{\partial V^*}{\partial k_t} = \lambda(t) \text{ och } \frac{\partial V^*}{\partial x_t} = \mu(t) \quad (4.10)$$

Detta resultat kan visas med ett ingenjörsbevis[58]. Vi kan därmed också använda ett trick för att undersöka hur ändringar av α påverkar den optimala värdefunktionen. Tricket innebär att vi introducerar α som en tillståndsvariabel genom att till Hamilton-funktionen lägga följande triviala differentialekvation:

$$\begin{aligned} \dot{\alpha} &= 0 \\ \alpha(t) &= \alpha \end{aligned} \quad (4.11)$$

Vi skriver:

$$H^*(t) = u[c^*(t), x^*(t)] e^{-\theta t} + \lambda(t) \dot{k}^*(t) + \mu(t) \dot{x}^*(t) + \varphi(t) \dot{\alpha}^* \quad (4.12)$$

där $\varphi(t)$ är skuggpriset (co-state-variabeln) för ändringar i α. Eftersom $\dot{\alpha} = 0$ ändras inte Hamilton-funktionens optimala värde och inte heller den optimala värdefunktionens genom operationen. Ingenjörsbeviset som nämns ovan gäller naturligtvis också $\dot{\alpha}$, och vi kan skriva ändringen av den optimala värdefunktionen, den partiella derivatan av värdefunktionen, med avseende på α som:

$$\frac{\partial V^*}{\partial \alpha} = \varphi(t) \quad (4.13)$$

där den partiella derivatan med avseende på α är beräknad längs den optimala banan. Som vi ska se kan vi inte utan vidare dra slutsatsen att skuggpriset, som anger utfallet av cost-benefit-analysen, är positivt. Ett sätt att undersöka frågan är att gå via ett av förstaordningsvillkoren för en optimal bana. Förstaordningsvillkoret för ändringen av skuggpriset för α över tiden ser ut på följande sätt:

$$\dot{\varphi}(s) = -\frac{\partial H^*(s)}{\partial \alpha} \quad (4.14)$$

Om vi integrerar från starttidpunkten t till en sluttidpunkt, betecknad *T*, erhålls

---

[57] Se Weitzman (1976).

[58] Se Aronsson et al. (2004). Beviset visar på samma typ av enveloppegenskaper som i alla tidigare cost- benefit-regler i denna manual.

$$\varphi(T) = \varphi(t) - \int_t^T \frac{\partial H^*(s)}{\partial \alpha} ds \tag{4.15}$$

Låter man *T* gå mot oändligheten kan det för relativt "snälla" problem visas att

$\lim_{T \to \infty} \varphi(T) = 0$.

Därför erhålls

$$\varphi(t) = \int_t^\infty \frac{\partial H^*(s)}{\partial \alpha} ds \tag{4.16}$$

vilket ger projektets nuvärde. Fortfarande är projektet relativt osynligt, men det återstår bara att sätta in uttrycken för den partiella derivatan av den optimerade Hamilton-funktionen i integralen. Vi får:

$$\frac{\partial H^*(t)}{\partial \alpha} = -\mu(t)x^*(t) - \lambda(t)(\partial I / d\alpha) \tag{4.17}$$

Den första termen anger intäkterna i nyttotermer över det korta intervallet $(t, t+dt)$ och den andra termen är investeringskostnaden i samma metrik och intervall. Den första termen är positiv därför att $\mu(s)$ är negativ på grund av att utsläppen är skadliga, och därför att också $d[-\alpha x(s)] / d\alpha = -x(s)$ är negativ. Den andra termen är negativ därför att skuggpriset för kapital är positivt. Efter substitution får vi:

$$\varphi(0) = \int_0^\infty [-\mu(s)x^*(s) - \lambda(s)(\partial I / d\alpha)] ds$$

(4.18)

Slutsats: *Projektet är lönsamt om* $\varphi(0) > 0$*, annars olönsamt.*

Läsaren kanske frågar sig var diskonteringen tog vägen? Till saken hör att de skuggpriser $\mu(s)$ och $\lambda(s)$ är beräknade i nuvärde. Om de beräknas i löpande värde kan de skrivas som:

$$\lambda^m(s) = \lambda(s)e^{\theta s} \text{ och } \mu^m(s) = \mu(s)e^{\theta s} \tag{4.19}$$

Vi kan då skriva

$$\begin{aligned} &\int_0^\infty (-\mu(s)x^*(s) - \lambda(s)) \frac{\partial I}{\partial \alpha}) ds = \int_0^\infty [-\mu(s)\lambda^{-1}(s)x^*(s) - \lambda(s)\lambda^{-1}(s) \frac{\partial I}{\partial \alpha}] \lambda^m e^{-\theta s} ds \\ &= \frac{\partial V^*}{\partial \alpha} = \int_0^\infty [\bar{\mu}(s)x^*(s) - \frac{\partial I}{\partial \alpha})] \lambda^m(s) e^{-\vartheta s} ds \end{aligned} \tag{4.20}$$

$\bar{\mu}(s) = -\mu(s) / \lambda(s)$ som är värdet i kronor och ören av en enhets minskning av beståndet $x(t)$ (willingness to pay för en marginell minskning av utsläppen).

För att transformera problemet till en fullständig penningmetrik behöver vi till att börja med lösa för sambandet mellan nyttodiskonteringsfaktorn och penningräntan. Diskonteringsfaktorn $\exp(-\theta s)$

kan skrivas i termer av marknadsräntan genom att lösa en s.k. Euler-ekvation (nödvändig i optimeringen) som kan skrivas som en differentialekvation $\dot{\lambda}^m(s)=\lambda^m(s)(r(s)-\theta)$ och lösas[59] så att:

$$\lambda^m(s)\exp-\theta s=\lambda_0\exp(-\int_0^s r(\tau)d\tau) \tag{4.21}$$

Där $\lambda^m(0)=\lambda_0^m$ är skuggpriset i startpunkten och en konstant. Efter substitution kan vi skriva värdet av projektet i monetära enheter som:

$$\varphi(0)/\lambda_0=\int_t^\infty[\bar{\mu}(s)x(s)-\frac{\partial I}{\partial\alpha}]\mathrm{e}^{-\int_0^s r(\tau)d\tau}ds \tag{4.22}$$

Den allmänna jämviktslösning som presenterats här har uppnåtts av en social planerare som optimerar marknadsekonomin på ett perfekt sätt. Med andra ord, den leder till en perfekt dynamisk marknadsekonomi där prissystemet kan lösas för den givna allokeringen. Vår modell ger därför en cost-benefit-regel för små projekt i den perfekta dynamiska marknadsekonomin.

Innan vi övergår till en cost-benefit-regel för den ofullständiga dynamiska marknadsekonomin vill vi ge läsaren ett ”nytt resultat” som följer ur föreliggande modell. Det har att göra med s.k. indirekta effekter som antas följa av små projektet, även efter det att projektet har slutförts. Säg att projektet startar i tidpunkt t och avslutas i tidpunkt T. Under den tiden har alla kostnader och intäkter som projektet genererade inkluderats. Det känns dock inte orimligt att projektet har gett indirekta effekter (positiva och negativa) som varar efter tidpunkten T. Så är inte riktigt fallet:

Påstående 1: *Ett litet projekt*[60] $\mathbf{d\alpha}$ *i en perfekt marknadsekonomi över tidsintervallet* $[t,T]$, *leder till förändringar i konsumtion och investeringar; i vektorform* $\mathbf{dc}=\frac{\partial\delta}{\partial\alpha}d\alpha$, $\mathbf{dI}=\frac{\partial\mathbf{I}}{\partial\alpha}d\alpha$. *Värdet av projektet kan mätas som nedanstående förändring av nationalinkomsten:*

$$\int_t^T[\mathbf{p}^*(s)\mathbf{d}\hat{c}(s)+\mathbf{q}^*(s)\,\mathrm{d}\hat{\mathrm{I}}(s)]\mathrm{e}^{-\int_t^T r(\tau)d\tau}ds$$

Om summan av förändringen av nationalinkomsten är positiv över intervallet $[t,T]$ *är projektet samhällsekonomiskt lönsamt, om den är negativ är projektet olönsamt.*

Prisvektorerna längs tillväxtbanan är $\mathbf{p}^*(t),\mathbf{q}^*(t)$ där $\mathbf{q}^*(t)$ är priset på investeringsvaror. Som framgår av påståendet ovan är det inte cost-benefit-regeln som mäts utan reformparametrarnas effekter på ändringen av nationalinkomsten över projektperioden. Intuitionen är att effekterna på onsumtionen efter tidpunkten T [från (T,∞)], redan har tagits hand om av värdet av ändringen av investeringarna över projektperioden. Tekniskt innehåller beviset en enveloppegenskap som eliminerar alla indirekta effekter[61]. I viss mån påminner resultatet om ett resultat i kapitel 2, där det visades att ändringar i nationalinkomsten kan vara en välfärdsindikator för små projekt. Det finns

---

[59] $r(s)=$kapitalets marginalprodukt $f_k(k(s),x(s))$.

[60] Notationen betyder att $\boldsymbol{\alpha}$ är en vektor liksom priser och kvantiteter.

[61] Resultatet bevisades av Li och Löfgren (2008).

dock en väsentlig skillnad mellan de två fallen. I kaptiel 2 finns, till skillnad från här, inga kapitalföremål och ingen tidsdimension.

Slutsats: *För alla små projekt i en dynamisk perfekt marknadsekonomi som bygger på optimering är summan av ändringar i nationalinkomsten mätt över projektperioden och värderad i priserna i varje period en exakt cost-benefit regel.*

Ett exempel kan delvis illustrera hur resultatet fungerar. Vi använder oss av en Ramsey-modell med en logaritmisk nyttofunktion och en linjär produktionsteknologi. Samhällets intertemporala välfärd kan skrivas som

$$w_0 = \int_0^{\infty} \ln c(t) e^{-\theta t} dt$$

medan kapitalstocken utvecklas enligt följande ekvation

$$\dot{k}(t) = \mu k(t) - c(t)$$

med en initial kapitalstock $k(0) = k_0 > 0.$ Parametern μ står för produktivitetsnivån. Vi kan lösa för den optimala banan över tiden för konsumtion $c^*(t) = \theta k_0 e^{(\mu-\theta)t}$, $\dot{k}^*(t) = i^*(t) = k_0(\mu-\theta)e^{(\mu-\theta)t}$ och $k^*(t) = k_0 e^{(\mu-\theta)t}$ och deras motsvarande priser $p^*(t) = e^{-(\mu-\theta)t} / \theta k_0 = q^*(t)$ och $s^*(t) = \mu / \theta e^{-(\mu-\theta)t}$. Notera att priserna på konsumtion och investeringar är desamma, därför att det bara finns en enda (homogen) vara. Låt nu intervallet för projektet vara $[0, T]$ och den direkta parameterändring som görs är att produktivitetsnivån förändras med $d\mu$. Detta innebär att $di / d\mu$ $= k^*(t)$ och $dc^* = 0.$ Nuvärdet av förändringen blir

$$dw_0 = \int_0^{T} q^*(t) \frac{di(t)}{d\mu} e^{-\theta t} dt = \frac{1}{\theta^2}(1 - e^{-\theta T})$$

Påstående 1 som visades ovan kan jämföras med åtminstone två andra lösningar som ger samma resultat. Det vill säga alla cost-benefit-regler ger samma resultat, men vi vidhåller att lösningen i *Påstående* 1 är den som är enklast att hantera. Orsaken är att nettonationalprodukten NNP fungerar som en bekväm välfärdsindex utan att involvera några indirekta sidoeffekter.

***Påstående 2*:** Effekten av en liten politikreform, $d\alpha$, över perioden $[t, T]$ på värdefunktionen är densamma som förändringen av nuvärdet av den framtida konsumtionen över perioden $[t, T]$

$$dw_2(\alpha) = \int_t^{\infty} [\mathbf{p}^*\mathbf{(s)dc(s)}e^{-\int_t^s r(\tau)d\tau}]ds$$

Denna regel är i det närmaste trivial, men vi skall använda den tredje regeln att för att bevisa den.

***Påstående 3*:** Studera en liten reform under perioden $[t, T]$ som leder till förändringar i konsumtion, investeringar och kapitalbestånden i projektperioden genom förändringarna $[\mathbf{\Delta c(s), \Delta I(s), \Delta k(s)}]_t^T$.
Projektet är då lönsamt om och endast om

$$\int_t^T [\mathbf{p}^*(\mathbf{s})\Delta\mathbf{c}(\mathbf{s}) + \mathbf{q}^*(\mathbf{s})\Delta\mathbf{I}(\mathbf{s}) + \boldsymbol{\kappa}^*(\mathbf{s})\Delta\mathbf{k}(\mathbf{s})]e^{-\int_t^s r(\tau)d\tau} ds > 0.$$

där $\boldsymbol{\kappa}^*(\mathbf{s}) = [\dot{\boldsymbol{\mu}}(\mathbf{s}) - \boldsymbol{\theta\mu}(\mathbf{s})](\boldsymbol{\lambda}^{\mathbf{m}}(s))^{-1})$ är kapitalräntor för kapitalbestånden medan $\boldsymbol{\lambda}^m(\mathbf{s}) = \mathbf{u_c}[\mathbf{c}(\mathbf{s})]$.

Integranden ovan, dvs.

$$\mathbf{p}^*(\mathbf{s})\Delta\mathbf{c}(\mathbf{s}) + \mathbf{q}^*(\mathbf{s})\Delta\mathbf{I}(\mathbf{s}) + \boldsymbol{\kappa}^*(\mathbf{s})\Delta\mathbf{k}$$

kallar Dixit et.al. (1980) den samhällsekonomiska vinsten (social profit). Man kan nu visa att integralen innehåller en exakt differential $d[\mathbf{q}^*(\mathbf{s})\Delta\mathbf{k}(\mathbf{s})e^{-\int_t^s r(\tau)d\tau}]/ds$ i termer av de två sista termerna i den samhällsekonomiska vinsten vilket ger

$$\int_{\mathbf{t}}^{\mathbf{T}} [\mathbf{q}^*(\mathbf{s})\Delta\mathbf{I}(\mathbf{s}) + \boldsymbol{\kappa}^*(\mathbf{s})\Delta\mathbf{k}(\mathbf{s})]e^{-\int_t^s r(\tau)d\tau} ds = \mathbf{q}^*(\mathbf{T})\Delta\mathbf{k}(\mathbf{T})e^{-\int_t^T r(\tau)d\tau}$$

Detta uttryck[62] svarar emot det optimala värdet vid slutet av projektperioden i nuvärdetermer och det svarar mot

$$\int_{\mathbf{T}}^{\infty} \mathbf{p}^*(\mathbf{s})\mathbf{dc}(\mathbf{s})\,\mathrm{e}^{-\int_{\mathrm{T}}^{\mathrm{s}} \mathrm{r(t)dt}} ds = \int_{\mathbf{t}}^{\mathbf{T}} [\mathbf{q}^*(\mathbf{s})\Delta\mathbf{I}(\mathbf{s}) + \boldsymbol{\kappa}^*(\mathbf{s})\Delta\mathbf{k}(\mathbf{s})]e^{-\int_t^s r(\tau)d\tau} ds$$

och vi kan visa att dessa effekter ger tillsammans Påstående 2. Med andra ord, formlerna för *Påstående 2* och 3 ger samma resultat. Det gör också *Påstående 1*, men det är något svårare att bevisa. Se Li och Löfgren (2008) appendix.

Den tredje regeln är mycket välkänd (se t.ex. hos Arrow et al.2003; Dasgupta 2001), men den innebär liksom den andra regeln att man måste involvera indirekta effekter under projektperioden. Den tredje regeln implicerar den andra.

Påstående 1 följer av att man efter att ha utnyttjat enveloppegenskaper som finns kvar i Påstående 3. I Appendix 1 bevisar vi både Påstående 3 och Påstående 1.

LITEN VÄGLEDNING FÖR VALET AV DISKONTERINGSRÄNTA I EMPIRISKA STUDIER

Research in intertemporal choice has been done in a variety of contexts, yet there is a remarkable consensus that future outcomes are discounted (or undervalued) relative to immediate outcomes.” Soman et al. (2005 s 347)

Litteraturen om valet av diskonteringsränta i samhällsekonomiska bedömningar är mycket omfattande och bitvis starkt esoterisk. Det finns dock ingen samsyn vad gäller dess definition, empiriska storlek eller ens tecken även om det inledande citatet kan tolkas så att det inom flera akademiska discipliner finns empiriska belägg som tyder på att i princip alla levande organismer (behaving organisms) använder en positiv diskonteringsränta. Vi gör inget försök att här sammanfatta de olika ansatserna och deras egenskaper men goda översikter återfinns i t.ex. Valentim och Prado (2008), Burgess och Zerbe (2011) och inte minst i Harrisons (2010) nära 200-sidiga studie för

---

[62] Notera att $\Delta k(s) = 0$ när $s = t$ därför att $k(t) = k_t$ är given.

Australiens dåvarande produktivitetskommission samt Golliers (2012) bok om diskontering i en osäker värld. Flertalet läroböcker i offentlig ekonomi och miljöekonomi innehåller också utförliga sammanställningar av olika förekommande ansatser. Den som söker en kritisk granskning av nationalekonomins hantering av individers intertemporala konsumtionsval hänvisas till Frederick et al. (2002).

För att på enklast tänkbara sätt illustrera valet av diskonteringsränta utgår vi från en modellekonomi som producerar en enda vara/tjänst med arbetskraft och kapital som produktionsfaktorer. Den välartade produktionsfunktionen förutsätts vara linjärt homogen, dvs. om insatsen av produktionsfaktorer fördubblas så fördubblas produktionsvolymen. Produktionsfunktionen vid tidpunkt t skrivs:

$$Y(t) = L(t) \cdot f[k(t)] \tag{4.23}$$

där Y är produktionsnivån (och tidsindicering undertrycks i fortsättningen), L kan uppfattas som befolkningsstorleken (arbetskraftens storlek), $f(.)$ är produktionsfunktionen per capita och k är kapitalstocken per capita. Det förutsätts att produktionsfunktionen $f(.)$ är välartad i den meningen att den satisfierar de s.k. Inada-villkoren[63]. Låt oss beteckna den *relativa* befolkningstillväxten $n = \dot{L}/L$, där en punkt anger en tidsderivata, dvs. $\dot{L} = dL/dt$.

Produktionen antingen konsumeras eller investeras för att bygga ut den framtida produktionskapaciteten. Därför innebär marknadsjämvikt att

$$f(k) = c + \dot{k} + n \cdot k \tag{4.24}$$

där c är konsumtionsefterfrågan per capita och $\dot{k}$ är investeringsvolymen per capita (och vi för enkelhets skull bortser från deprecieringar). ultipliceras båda leden med befolkningsstorleken L erhålls det mer bekanta uttrycket att utbudet skall vara lika med aggregerad efterfrågan.

Antag att samhällets mål är att maximera konsumtionen per capita. Det skulle kunna vara ett uthållighetskriterium för ett samhälle, dvs. man syftar till att alla generationer skall ”ha det lika bra” i meningen samma materiella standard. Då erhålls:

$$dc/dk = f'(k) - n = 0 \tag{4.25}$$

där $\partial f(.)/\partial k = f'(k)$ och $\dot{k} = 0$ eftersom vi söker ett stationärt tillstånd (steady state) där kapitalstocken per capita är konstant över tiden. Ekvation (3) kallas *den gyllene regeln*[64] (Golden Rule): kapitalstocken per capita skall vara sådan att dess marginalprodukt sammanfaller med den relativa

[63] Att funktionen satisfierar Inada-villkoren tolkas här som att 1) $f(k)$ är två gånger deriverbar på intervallet $(0,\infty)$, 2) $\partial f(k)/\partial k = f'(k) > 0$ och $f''(k) < 0$ för alla $k \in (0,\infty)$, dvs. $f(k)$ är växande och strikt konkav, 3) $f(0) = 0$ och $f(\infty) = \infty$, 4) $\lim_{k \to 0^+} f'(k) = \infty$ och $\lim_{k \to \infty} f'(k) = 0$. Inada (1963, s 120) nämner explicit villkoren 2) och 4) vilka han betecknar ”the derivative condition” (och 3) följer från the derivative condition plus en linjärt homogen produktionsfunktion; se t.ex. Barro och Sala-i-Martin (1995, s 52)). Inada noterar för övrigt (i fotnot 2 på s 119) att Uzawa (1963) använt samma villkor. Därför kan man också beteckna villkoren Inada-Uzawa-villkor.

[64] En gyllene regel med etisk innebörd återfinns i de flesta religioner. Så heter det t.ex. i Bibeln (2000) ”Allt vad ni vill att människorna skall göra för er, det skall ni också göra för dem. Det är vad lagen och profeterna säger.” (Matt. 7:12) ; Barro och Sala-i-Martin (1995, s 20) refererar i sin diskussion av den gyllene regeln till samma citat. Och kanske vill mänskligheten ha en och samma konsumtionsnivå för alla individer och generationer. Vad vet vi!

befolkningstillväxten. Ett enkelt svar på frågan vilken diskonteringsränta som bör användas är således att den bör vara lika med den relativa befolkningstillväxten. Det kan förefalla som man även kan tolka n som ett mått på sådan teknisk utveckling som höjer arbetskraftens produktivitet. Att maximera konsumtionen per capita är dock inte ett självklart mål om framtida generationer kan få det allt bättre; det innebär ju t.ex. att mer produktiva generationer ”beskattas” till förmån för mindre produktiva sådana vilket både är tekniskt svårt och kan skapa incitamentsproblem[65]. Läsaren hänvisas till Solow (1986) för en närmare diskussion.

Ett alternativ till att värdera konsumtion är att utgå från att samhället värderar välfärd. Låt oss anta att den sociala välfärdsfunktionen kan skrivas:

$$W = \int_0^{\infty} u(c) \cdot e^{-\theta \cdot t} dt \tag{4.26}$$

där $u(.)$ är den momentana nyttofunktionen (som antas satisfiera Inada-villkoren) och $\theta > 0$ är nyttodiskonteringsräntan[66]. Samhället antas således maximera den diskonterade summan av nyttor. Det är med andra ord ett slags utilistisk välfärdsfunktion (även om somliga anhängare av utilitarism skulle värja sig mot diskontering av framtida nyttor).

Maximeras (4.26) givet (4.24) så erhålls följande restriktion på kapitalstocken i ett varaktighetstillstånd:

$$f'(k) = n + \theta \tag{4.27}$$

Detta är den *modifierade gyllene regeln* (Modified Golden Rule): kapitalstocken skall vara sådan att dess marginalprodukt är lika med summan av den relativa befolkningstillväxten n och den marginella tidspreferensen θ. Det nyttomaximerande samhället använder således $n + \theta$ som diskonteringsränta. Det kan visas att en decentraliserad dynamisk marknadsekonomi av det slag som vi arbetar med i denna manual genererar en jämvikt (i ett stationärt tillstånd) sådan att $r = n + \theta$, där r är marknadsräntan.

För att enkelt belysa detta sistnämnda resultat utgår vi från den sociale planerarens optimeringsproblem i en ekonomi utan imperfektioner, dvs. från det klassiska Ramsey-problemet. Planeraren maximerar (4.26) givet (4.24) och restriktionerna att den initiala kapitalstocken är given samt att såväl kapitalstock som konsumtion är icke-negativa vid varje tidpunkt; jämför maximeringsproblemet i ekvationerna (4.5) och (4.6). Den associerade Hamilton-funktionen kan skrivas:

$$H(t) = u[c(t)] \cdot e^{-\theta \cdot t} + \lambda(t)[f[k(t)] - c(t) - n \cdot k(t)] \tag{4.28}$$

där $\lambda(t)$ är ett skuggpris (adjoint variable). Första ordningens villkor för ett inre maximum kan efter ett antal operationer skrivas[67]:

$$f'(k) = em \cdot \dot{c}^R + n + \theta \tag{4.28'}$$

---

[65] Det omvända, dvs. att beskatta nu levande till förmån för framtida generationer, är kanske enklare. Måhända är den norska oljefonden (Statens pensjonsfond utland) ett exempel härpå; se Norges finansdepartement (2013).

[66] Integralen i ekvation (4) konvergerar inte nödvändigtvis om $\theta \leq 0$.

[67] Läsaren hänvisas till ekvation (7’) på sidan 40 i Blanchard och Fisher (1996) och ekvationerna (2.8) och (2.10), där $n = 0$, i Barro och Sala-i-Martin (1995). I båda läroböckerna visas hur man kan skriva om första ordningens villkor så att de ”reduceras” till ekvation (4.28’).

där tidsindiceringen har undertryckts, $\dot{c}^R = \dot{c}/c$ är per capita-konsumtionens relativa tillväxt och $em = -c \cdot u''/u'$ är (minus) marginalnyttans elasticitet med avseende på konsumtionen, där ett primtecken (bis) avser förstaderivatan (andraderivatan) av $u(.)$ med avseende på konsumtionen. Denna elasticitet kan sägas reflektera nyttofunktionens kurvatur; den sammanfaller för övrigt rent tekniskt med (minus) Arrow-Pratts mått för relativ riskaversion[68]. Notera att i ett varaktighetstillstånd så gäller att $\dot{c} = 0$ varför den modifierade gyllene regeln gäller i ett sådant tillstånd. I ekvation (4.28′) skulle man kunna uppfatta θ som den faktor som ”diskonterar” framtida generationer, om $u(.)$ antas svara mot en generation. Det ter sig inte orimligt att lägga till vikten θ om konsumtionen ökar över tiden, dvs. om framtida generationer förväntas vara rikare eller ha högre välfärd än dagens generation[69]. Högerledet i ekvation (4.28′) betecknas ofta *Ramsey-regeln* för diskontering.

I en marknadsekonomi gäller att ett vinstmaximerande företag väljer kapitalstock så att $f'(k) = r$ vid varje tidpunkt. Således gäller att $r = em \cdot \dot{c}^R + n + \theta$ i den perfekta marknadsekonomin. I det specialfall vi studerade ovan där ekonomin befinner sig i ett varaktighetstillstånd, dvs. $\dot{c} = 0$, gäller att $r = n + \theta$.

Den Europeiska kommissionens DG Policy (2008) skattar i sin manual för samhällsekonomiska analyser högerledet i ekvation (4.28′) för ett antal olika medlemsstater. Det bortses därvid från befolkningstillväxt och (minus) marginalnyttans elasticitet sätts till 1.2 medan tidspreferensen sätts till 1.1; dessa värden är baserade på Evans (2007). Skattas modellen för Sverige med BNP-data för perioden 1970-2006 (eftersom $\dot{c}^R$ inte fanns tillgänglig för perioden) och i övrigt med de antaganden som kommissionen använt erhålls:

$$r^s = em^s \cdot \dot{c}^{R^s} + \theta^s = 1.2 \cdot 1.7 + 1.1 = 3.1 \qquad (4.29)$$

där ett toppindex s refererar till ett skattat värde och alla storheter tolkas som procent per år; läsaren hänvisas till Johansson och Kriström (2012) för detaljer om beräkningen. Läggs befolkningstillväxt (se nedan) till landar man på närmare 3.5 procent. Appliceras den modifierade gyllene regeln landar man å andra sidan närmare 1.5 procent.

Låt oss också beröra en skattning av Valentim och Prado (2008). De utgår från en modell som Feldstein (1965) utvecklat:

$$r = (1+n)^{1-\varphi)} \cdot (1+\dot{y}^R)^{\eta} \cdot (1+\theta) - 1 \qquad (4.30)$$

där r är diskonteringsräntan, n är befolkningstillväxten, φ mäter befolkningstillväxtens inverkan på nyttonivån (om vi har ett representativt hushåll), $\dot{y}^R$ är inkomstens tillväxt, η är koefficienten för relativ riskaversion ($= em$) och θ är den rena tidspreferensen. Notera att i frånvaro av befolknings- och inkomsttillväxt är $r = \theta$.

Skattas denna modell på svenska befolknings- och inkomstdata för perioden 1970-2008 och med φ och η enligt Valentim och Prado (2008) erhålles en diskonteringsränta på 2.9-3.4 procent[70]. Den högre nivån erhålls om koefficienten för relativ riskaversion sätts till 1.26 och den lägre om koefficienten

---

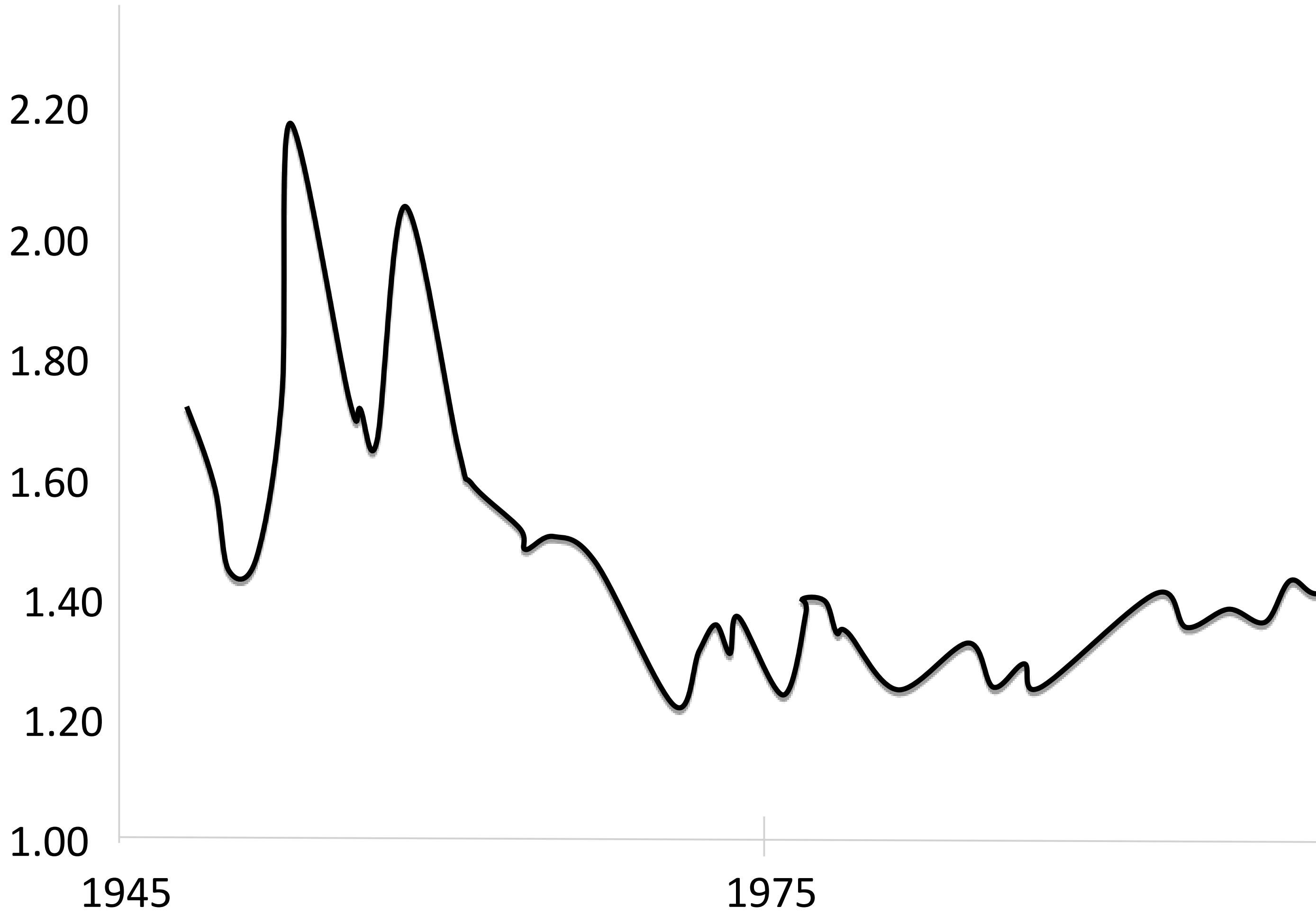
[68] Se Arrow (1965) och Pratt (1964). Enligt Montesano (2008) publicerade de Finetti ett snarlikt mått redan 1952.

[69] Ramsey (1928) antog att $\theta = 0$ eftersom han inte ansåg det etiskt försvarbart att diskontera framtida generationers nytta; läsaren hänvisas t.ex. till appendix 1.3.9 i Barro och Sala-i-Martin (1995) för en diskussion av hur Ramsey hanterade nyttomaximeringsproblemet när $\theta = 0$.

[70] $r^s = 100 \cdot (1.0024^{0.5} \cdot 1.018^{\eta^s} \cdot 1.01 - 1)$, där η^s sätts till 1 eller 1.26.

sätts till 1. Det kan noteras att $\eta^s = 1.26$ är det bästa estimatet baserat på tvärsnittsdata för 50 länder och år enligt Layard et al. (2008). Läsaren hänvisas till Johansson och Kriström (2012) för ytterligare detaljer.

Självfallet är det utomordentligt vanskligt att försöka skatta icke observerbara storheter som η eller em. Trots detta har det gjorts många försök varav Layard et al. (2008) representerar ett och en god översikt av olika ansatser återfinns i Evans (2007). Ett angreppssätt använder inkomstskatteskalor för att skatta vad man skulle kunna kalla aversion mot ojämlikhet, i praktiken η eller em. Ett sådant försök för Storbritannien replikeras i figur 1 och förklaras närmare i Groom och Maddison[71] (2013). Uppenbarligen föreligger stora variationer över tiden men sedan mitten av 1970-talet ligger indexet i allmänhet i intervallet 1.2-1.4.



Figur 4.1. Ett index för aversion mot ojämlikhet för Storbritannien. Källa: Egen frihandsritning baserad på figur 2.1 i Groom och Maddison (2013).

Våra enkla skattningar ger en social diskonteringsränta på 3-4 procent. Det kan noteras att Storbritannien använder en diskonteringsränta på 3.5 procent för projekt med relativt begränsad

[71] Angreppssättet bygger på principen om samma absoluta nyttouppoffring för alla, dvs. att skatten skall "kosta" lika mycket i termer av nyttoenheter för alla (equal absolute sacrifice). Principen återfinns redan i Mill (1848) och en elegant grafisk illustration ges av Musgrave och Musgrave (1984, kapitel 11).

livslängd (mer om detta nedan) varav 1 procent skall reflektera risker för katastrofer, Tyskland 3 procent och Frankrike 4 procent (men vissa av länderna använder s.k. hyperbolisk diskontering; se nedan). Evans (2007) argumenterar för en enhetlig diskonteringsränta på 3-4 procent för de mer utvecklade EU-länderna. Europeiska kommissionens DG Policy (2008) föreslår i sin manual för samhällsekonomiska analyser att man skall använda 3.5 procent vid samhällsekonomiska utvärderingar av infrastrukturinvesteringar. Svenska Trafikverket använder också 3.5 procent efter sin senaste revision.

Används en ränta på 3 (eller 4) procent i baskalkylen i en samhällsekonomisk projektutvärdering föreslår vi att 1.5 procent respektive 6 procent används i en känslighetsanalys. Den lägre räntan ligger nära den ränta, 1.4 procent, Stern (2007) använder i sin välkända skattning av kostnaden för klimatförändringar; Stern utgår från ekvation (4.28′) med $n = 0$. En av hans mer prominenta kritiker, Martin Weitzman, finner i sin recension (2007) av Stern en ränta på 6 procent mer rimlig[72]. Även amerikanska studier där man försökt skatta kapitalets sociala alternativkostnad (social opportunity cost of capital) landar i storleksordningen 6-8 procent. Läsaren hänvisas till Burgess och Zerbe (2011) och Nordhaus (2007). Den senare kalibrerar sin i klimatsammanhang välkända numeriska allmänna jämviktsmodell (DICE) i en recension av Stern (2007) och landar på 5-6 procent. Det bör kanske tilläggas att sådana skattningar görs på en ganska abstrakt nivå, i bästa fall kan de tolkas som (en amerikansk syn på vad som är) global nivå. Det är ju inte självklart att skattningar kalibrerade på en modell av Sverige skulle ge samma resultat.

När det gäller projekt som genererar kostnader (och intäkter) långt fram i tiden så innebär även en moderat diskonteringsränta att kostnaderna (och intäkterna) ”diskonteras bort”. Det har därför hävdats att man bör använda *hyperbolisk diskontering*. En sådan ansats innebär att räntan blir lägre ju längre fram i tiden en kostnad eller intäkt ligger. Med andra ord används lägre diskonteringsräntor för framtida generationer än för de nu levande; Redan Strotz (1955-1956) underströk vikten av att introducera över tiden fallande diskonteringsräntor men den första hyperboliska diskonteringen i ekonomiska sammanhang tycks gå att hänföra till Phelps och Pollak (1968). Det finns för övrigt forskare – inte minst psykologer – som hävdar att alla organismers beteende bättre förklaras med hyperbolisk än med exponentiell diskontering; ”…. there is now ample experimental evidence that all behaving organisms have a basic tendency to devalue expected rewards as a hyperbolic function of delay, which is much more deeply bowed than the conventional exponential function.” (Ainslie (2002, s 2)).

Den brittiska Green Book (2003), som är finansdepartementets (HM Treasury) cost-benefit-manual, föreslår en ”diskonteringstrappa” (utan att till synes närmare precisera på vilka antaganden/modeller trappan bygger), där räntan är 3.5 procent för de 30 första åren, 3 procent för åren 31 till och med 75, och så vidare, som framgår av tabell 4.1 nedan. En snarlik ”trappa” finns i en studie av Weitzman (2001). Weitzmans trappa i tabellen avser en modell skattad utifrån en diskonteringsfråga besvarad av ett stort antal ekonomer (över 2 000 med doktorsexamen och separat urval bestående av ett 50-tal ledande ekonomer). Slutligen presenteras den trappa som föreslås av norska regeringens expertpanel för utformningen av samhällsekonomiska analyser (i NOU 2012, tabell 5.2). Enligt Gollier (2011, ss 35-36) använder även Frankrike numera en diskonteringstrappa där räntan är 4 procent för de första 30 åren och 2 procent därefter.

[72] En mycket stimulerande och stringent diskussion av Stern-rapporten återfinns i Arrow (2007). Harrison (2010, tabell 3.1) sammanställer 10 studier som sökt skatta Ramsey-formeln i ekvation (4.28′). Av dessa ligger 9 i intervallet 1.4-6 procent och 1 i intervallet 2-8 procent.

Tabell 4.1. Intertemporala "diskonteringstrappor" (procent) enligt Storbritanniens "Green Book" (2003), Weitzman (2001) och NOU (2012).

År 2003 UK Green Book		År 2001 Weitzman		År 2012 NOU	
- 30	3.5	-5	4	-40	4
31-75	3	6-25	3	40-75	3
76-125	2.5	26-75	2	75-	2
126-200	2	76-300	1		
201-300	1.5	301-	0		
301-	1				

Frågan är då hur man praktiskt går till väga då räntan varierar över tiden, dvs. skall en intäkt eller kostnad som infaller år 31 i det brittiska exemplet diskonteras med 3 procent eller ej. För att få vägledning kan vi betrakta det samhällsekonomiska nuvärdet av en investering som varar i T perioder:

$$\pi(T) = \int_0^T a(t) \cdot e^{-\int_0^t r(s)ds} dt \tag{4.31}$$

där $a(t)$ är den samhällsekonomiska nettointäkten/nettobetalningsvilligheten och $r(t)$ är den sociala diskonteringsräntan vid tidpunkt t. Förlängs tidshorisonten marginellt ändras nuvärdet på följande sätt[73]:

$$\pi'(T) = a(T) \cdot e^{-\int_0^T r(t)dt} \tag{4.32}$$

Beloppet $a(T)$ diskonteras således *inte* med den ränta som gäller vid tidpunkt T, dvs. $\pi'(T) \neq a(T) \cdot e^{-r(T) \cdot T}$ när räntan varierar över tiden. Används den brittiska trappan som exempel, och vi för tydlighetens skull går över till diskret tid, är en krona som investeras i dag och tas ut år 31 då värd $(1+0.035)^{30} \cdot (1+0.03)^{(31-30)}$, dvs. en krona som erhålls år 31 kan i dag anses motsvara $1/[1.035^{30} \cdot 1.03^{(31-30)}]$ och *inte* $1/[1.03^{31}]$; något som för övrigt direkt framgår av ekvationerna (1.2) och (1.3) i kapitel 1.

Konventionell investeringsteori talar således för att diskonteringen bör ske som följer, om vi återvänder till kontinuerlig tid men håller fast vid det brittiska fallet:

$$NPV = \int_0^{30} a(t) \cdot e^{-0.035t} dt + \int_{30}^{75} a(t) \cdot e^{-0.035 30-0.03(t-30)} dt + \int_{75}^{125} a(t) \cdot e^{-0.035 30-0.03 \cdot 45-0.025(t-75)} dt + \ldots$$

(4.33)

där $a(t)$ åter betecknar den samhällsekonomiska nettointäkten vid tidpunkt t. Tillvägagångssättet i ekvation (4.33) innebär för övrigt att skillnaden mellan att diskontera med 3.5 procent "för evigt" och enligt trappan är blygsam då $a(t) = 1$ för alla t; nuvärdet är 1/0.035≈28.57 mot cirka 31.24 enligt ekvation (4.33). Självfallet kan det finnas etiska eller andra aspekter som talar för att man i stället diskonterar (säg) år 31 med $1/(1+0.03)^{31}$ i stället för som ovan; problemet är bara att vi då lämnar den konventionella investeringsteorin, varför de allokeringsmässiga konsekvenserna är svåra att överblicka. Såväl britter som fransmän diskonterar för övrigt på det sätt som vi föreslår i ekvation

---

73 Om räntan är konstant reduceras uttrycket till $\pi'(T) = a(T) \cdot e^{-rT}$.

(4.33); läsaren hänvisas till the Green Book (2003, annex 6) respektive Gollier (2011, ss 35-36) för detaljer.

Det bör dock poängteras att det är långt ifrån problemfritt att arbeta med en över tiden fallande ränta i ett maximeringsproblem. Ett ofta påtalat problem är *tidsinkonsistens*, dvs. att en lösning som ter sig optimal i dag inte är optimal i morgon om räntan förändras över tiden. Det finns dock exempel i litteraturen på modeller som kan ”hantera” denna problematik[74].

Det bör påpekas att det även finns ”Ramsey-ansatser” där konsumtionen antas vara föremål för stokastiska chocker; jmf. det stokastiska Ramsey-problemet i ekvationerna (4.41)-(4.42). Antas att konsumtionens tillväxttakt är normalfördelad med medelvärde $\dot{c}^{\mu}$ och varians $\sigma^2_{\dot{c}^u}$ kan den *utvidgade Ramsey-regeln* skrivas som:

$$r^{disc} = \dot{c}^{\mu} \cdot \eta + \theta - 0.5 \cdot \eta^2 \cdot \sigma^2_{\dot{c}^u} \tag{4.28''}$$

där det för enkelhets skull bortses från befolkningstillväxt och vi använt koefficienten för relativ riskaversion η i stället för elasticiteten; se Arrow et al. (2012, ss 10-11) för detaljer och referenser. Osäkerheten reducerar således diskonteringsräntan i förhållande till fallet utan osäkerhet i ekvation (6′); man vill helt enkelt spara/investera mer ”för säkerhets skull”. Åtminstone gäller det om samhället är riskavert, dvs. om $\eta > 0$ (och självfallet givet att vi har en spridning, dvs. att variansen är större än noll). Notera dock att räntan fortfarande är konstant över tiden (och att döma av Arrow et al. (2012 s 11) tycks osäkerhetstermen ha ett närmast marginellt genomslag på diskonteringsräntan, åtminstone gäller det USA). Antas i stället att chockerna är positivt korrelerade (och att nyttofunktionen är sådan att den relativa riskaversionen η är konstant) erhålls en över tiden fallande diskonteringsränta.

En utmärkt översikt över denna mestadels ekonometriskt inriktade litteratur återfinns i Cropper (2012) vars studie också finns ”insprängd” i Arrow et al. (2012). USA:s motsvarighet till vårt naturvårdsverk (U.S. EPA) frågade för en tid sedan Kenneth J. Arrow och 11 andra ekonomer om deras syn på diskontering när en reglering påverkar framtida generationer. I Arrow et al. (2012) sammanfattas panelens åsikter om Ramsey-diskontering inklusive hantering av osäkerhet, diskonteringstrappor (hyperbolisk diskontering) och huruvida samma ränta skall användas för att diskontera inom generationer som mellan generationer. Det skulle föra för långt att här försöka sammanfatta panelens drygt 30-sidiga rapport men den innehåller flera intressanta ingångar för skattningar av en Ramsey-ränta med en stokastisk framtida konsumtionsbana (till skillnad från vår skattning med ett genomsnitt). Läsaren hänvisas också till avsnittet om stokastiska dynamiska cost-benefit-regler för att få en uppfattning om den typ av matematik som stokastisk konsumtion och/eller produktion kräver. Det är förmodligen en lika svår som spännande utmaning att inte bara härleda utan också på ett konsistent sätt ekonometriskt skatta stokastiska motsvarigheter till vår ekvation (4.28′); det är betydligt enklare men också teoretiskt otillfredsställande att med avancerade ekonometriska metoder separat skatta uttryck för $\dot{c}$ (t.ex. random walk-modeller[75]) vilka sedan

---

[74] Gollier och Weitzman (2010) analyserar en modell där den framtida diskonteringsräntan inte är känd med säkerhet. Givet vissa antaganden faller den effektiva diskonteringsräntan över tiden mot sin lägsta tänkbara nivå. Det är dock inte helt uppenbart att – och i så fall hur – modellen kan operationaliseras.

[75] Enligt Nationalencyklopedin översätts random walk med, just det, slumpvandring. Ett exempel är (en hypotes) att gårdagens pris på en tillgång inte har någon betydelse för dagens pris. En slumpvandring med mycket korta steg ger som en approximation en Wiener-process; något förenklat gäller att när steglängden går mot noll konvergerar slumpvandringen mot en Wiener-process.

"appliceras" på formler à la (4.28'). Under alla omständigheter tycks de för svenska cost-benefit-analyser relevanta resultaten ännu så länge vara fåtaliga.

Det finns en ytterligare aspekt på valet av diskonteringsränta som bör beröras. I termer av en förnyelsebar resurs drar vi en enhet av resursbeståndet för att användas som input till vårt projekt. Det innebär att vi går miste om den marginella tillväxten, i ekvation (2.37) betecknad $F_g^{'}$, för all framtid (givet att stocken inte senare återförs till den ursprungliga nivån). Sammanfaller $F_g^{'}$ och r är beståndet optimalt och någon korrigering är inte nödvändig. Om $F_g^{'} > r$ tillkommer en nuvärdeskostnad som uppgår till $F_g^{'} / r$ om tidshorisonten får gå mot oändligheten. På samma sätt kan en "kil" mellan brutto- och nettoavkastning på investeringar uppfattas, det kan t.ex. röra sig om en beskattning av kapitalinkomst. Projektkostnaden kan då multipliceras med följande korrigeringsfaktor

$$k^k = k_i \frac{r^k}{r} + (1 - k_i)$$

där k_i är den andel av projektkostnaden som tränger undan privata investeringar, r^k är bruttoavkastningen på investeringar (svarande mot $F_g^{'}$ för naturresursen), och r är nettoavkastningen. För att belysa tillvägagångssättet kan vi anta att enbart privata investeringar trängs undan, dvs. att $k_i = 1$, att bruttoavkastningen är 5 procent, dvs. att $r^k = 0.05$, och att nettoavkastningen är 3 procent, dvs. att $r = 0.03$. Korrigeringsfaktorn blir då ungefär 1.67, dvs. projektkostnaden skall multipliceras med en faktor 1.67 och sedan diskonteras på sedvanligt sätt, här till 3 procent. Samhället går miste om de undanträngda investeringarnas "meravkastning", dvs. 2 procent, under all framtid. Åtminstone är det en förutsättning bakom angreppssättet genom att förlusten jämställs med en evig obligation. Ytterligare en förutsättning är att avkastningen snarare konsumeras än återinvesteras för att generera än högre avkastning i framtiden. Görs bedömningen att projektet bara till 50 procent tränger undan investeringar reduceras korrigeringsfaktorn till ca 1.33 och trängs bara konsumtion undan blir faktorn lika med 1. Hanteras skatter på det sätt som diskuterats i avsnittet om behandling av skatter, ger ekvation (3.23) det kostnadsuttryck som skall multipliceras med k^k. Används marginalkostnaden för allmänna medel (MCPF) i cost-benefit-analysen gäller det att vara aktsam eftersom kapitalskatter kan ingå i måttet varvid kapitalskatten i viss mening dubbelräknas. I annat fall multipliceras $k^N \cdot k^i$, där k^N är projektkostnaden eklusive skatter, med MCPF. Slutligen bör nämnas att det finns flera andra men snarlika sätt på vilka kapitalmarknadsimperfektioner kan hanteras. Läsaren hänvisas till Johansson och Kriström (2014) för en kort översikt. I synnerhet kan en liten öppen ekonomi som den svenska möta mer eller mindre perfekta internationella kapitalmarknader. Då förefaller det rimligt anta att r^k är internationellt bestämd.

FALLET MED OFULLSTÄNDIGA MARKNADER

Vi härledde tidigare en samhällsekonomisk kalkylregel för det fall då utsläppen följer en optimal bana, dvs. hanteras optimalt. Detta fall kan te sig orealistiskt varför vi här tillhandahåller en regel för det fall då de accumulerade utsläppen inte hanteras optimalt. De optimeras inte och det "betingade" optimeringsproblemet kan skrivas på följande sätt:

$$\max_{c(t)g(t)} \int_t^{\infty} u(c(s), x(s)) e^{-\theta s} ds \qquad (4.34)$$

under restriktionen

$$\begin{aligned} &\dot{k}(s) = f(k(s), g(s)) - c(s) - I(\alpha) \\ &k(t) = k_t \\ &\lim_{s\to\infty} k(s) \geq 0 \end{aligned} \qquad (4.35)$$

Hamiltonianen, som är mycket betydelsefull för lösningen av problemet, har följande utseende när den optimerats:

$$H^0(s) = u(c^0(s), x^0(s))e^{-\theta s} + \lambda(s)[f(k^0(s), g^0(s)) - c^0(s) - I(\alpha)] \qquad (4.36)$$

Toppindex noll säger att lösningen skiljer sig ifrån som är den som är den samhällsekonomiskt optimala (first best). Variabeln $x(s)$ har också ett toppindex då vi vet att den inte styrs på bästa möjliga sätt. Däremot är det relativt enkelt att lösa för hur den rör sig över tiden. Det som styr den över tiden är differentialekvationen:

$$\dot{x}^0(s) = g^0(s) - \alpha x^0(s) \qquad (4.37)$$

$$x(t) = x_t$$

Löses den erhålls uttrycket:

$$x^0(s,\alpha) = x_t e^{-\alpha s} + \int_t^s g^0(\tau,\alpha)e^{-\alpha(s-\tau)}d\tau \qquad (4.38)$$

Det ackumulerade beståndet av miljöutsläpp beror direkt på α genom effekten via deprecieringskomponenten och indirekt på utsläppsfunktionen $g^0(\tau;\alpha)$. Derivatan av utsläppsbeståndet $\partial x^0 / \partial\alpha = x^0_\alpha(s;\alpha)$ är sannolikt negativ därför att deprecieringsfaktorn går i den riktningen, och ett större α minskar kapitalstocken genom kostnadsfunktionen. Om utsläppen, g^0, är komplement till kapital i produktionen minskar g^0 då kapitalstocken minskar. I så fall är $x^0_\alpha(s;\alpha)$ negativ.

Vi kan nu replikera vårt trick från ovan och finna värdefunktionens partiella derivata med avseende på α, dvs. cost-benefit-regeln. Vi kan skriva:

$$\frac{\partial V^0}{\partial\alpha} = \int_t^\infty \frac{\partial H^0(s)}{\partial\alpha}ds = \int_t^\infty [u_x[c^0(s), x^0(t)]x^0_\alpha(s)e^{-\theta t} - \lambda(s)I(\alpha)]ds \qquad (4.39)$$

där $u_x(\bullet)$ är lika med den negativa marginalnyttan av den sista utsläppsenheten. Notera emellertid att $u_x(\bullet)x^0_\alpha(\bullet)$ är en positiv samhällsekonomisk intäkt. Vi kan nu gå till en penningmetrik genom att skriva betalningsviljan för att minska utsläppen med en enhet som:

$$WTP(s) = \frac{u_x(s)x_\alpha(s)}{\lambda(s)} \qquad (4.40)$$

Vi har tidigare visat hur man kan byta diskonteringsfaktor och vi kan därför generera en cost-benefit-regel som är uttryckt i monetära termer:

$$\frac{\partial V^0}{\partial \alpha}\frac{1}{\lambda_t^m} = \int_t^\infty [WTP(s) - I(\alpha)] e^{-\int_t^s r(\tau)d\tau} ds \qquad (4.41)$$

Slutsats: *Om projektet genomförs i en ekonomi där ett eller flera kapitalbestånd inte hanterats på ett optimalt sätt kan man i princip värdera projektet i en penningmetrik om man på något sätt kan mäta betalningsviljan över tiden. En möjlig approximation är att man använder en betalningsvilja som mätts i utgångsläget (diskontering gör en del av resten).*

Det finns många imperfektioner i marknadsekonomin och cost-benefit-reglerna måste typisk hanteras på lite olika sätt på grund av processer som i grunden är direkt tidsberoende, s.k. icke autonoma processer[76].

Vi har i avsnitten som avser Ramsey-modeller inte i grunden hanterat den matematik som krävs för att lösa de problem som vi antagit att vi kan lösa. Den baseras historiskt på bidrag av såväl Leonhard Euler som Joseph Langrange från slutet av 1700-talet. Den matematiken har fått namnet variationskalkyl, men en modern variant av denna kalkyl föddes under 1950-talet genom en grupp ryssar ledd av Lev Semenovich Pontryagin (som för övrigt var blind). Den kallas idag för Maximum-principen eller optimal kontrollteori, men viktiga delar av innehållet är direkt kopplat till Rowan Hamilton, Friedrich Jacobi och Richard Bellman som idag är kända för HJB-ekvationen. Jacobi levde i slutet av 1700-talet och början av 1800-talet, Hamilton levde i mitten av 1800-talet och Bellman gjorde sina bidrag i mitten av 1900 talet. Euler-ekvationen som vi nämner ovan är en pusselbit i Maximum-principen[77].

STOKASTISKA DYNAMISKA COST-BENEFIT-REGLER

Under osäkerhet kan dynamiska cost-benefit-regler härledas som i grunden ser likadana ut som motsvarande regler under säkerhet. Det är inte möjligt att här ge en fullödig förklaring till detta förhållande. Stokastiken drivs av brownsk rörelse, och just i detta fall blir reglerna för små projekt efter ett väntevärde i huvudsak desamma som under säkerhet. Brownsk rörelse tillskrivs den engelske botanikern Robert Brown som 1827 observerade små partiklar inneslutna i vätska som rörde sig till synes irreguljärt i vätskan. Einstein (1905) har fått äran för den matematiska formalismen kring brownsk rörelse, men en ännu tidigare formulering finns hos fransmannen Bachelier 1900 i en uppsats kring optionspriser. Processen kallas också för en Wiener-process.

Brownsk rörelse är en mycket märklig process, därför att den är överallt kontinuerlig men ingenstans deriverbar. Detta gör att matematiken behöver förnyas, t.ex. måste den integral som används ovan i den statiska modellen ersättas med en "stokastisk integral".

Om vi med brownsk rörelse menar processen, $B(t)$, där t är tiden, vet vi att den är kontinuerlig men inte deriverbar. Den är också definierad så att $B(0) = 0.$ Vidare är inkrementen $B(t+\tau) - B(t)$ normalfördelade med väntevärde noll och varians σ. Till sist, om (t,τ) och (t', τ') är disjunkta (åtskilda) så är inkrementen $B(t+\tau) - B(t)$ och $B(t'+\tau') - B(t')$ oberoende stokastiska variabler. Om $dB = B(t+dt) - B(t)$ gäller således att $E(dB) = 0$ och variansen är $E(dB^2) = \sigma^2 dt$. Variansen är alltså av ordningen dt (proportionell mot det lilla intervallet dt). Detta ger upphov till den matematiska komplikation som berörts ovan. För att se detta dividerar vi variansen med $(dt)^2$ och erhåller

---

[76] Läsaren hänvisas till Aronsson et al. (1997, 2004) för detaljer.

[77] Om detta kan man läsa i t.ex. läroböcker av Knut Sydsäter et al. (2008) och Alpha Chiang och Kevin Wainwright (2005).

$$E\{\frac{dB}{dt}\}^2 = \sigma^2 / dt \to \infty$$

eftersom $dt \to 0$. Med andra ord, $B(t)$ är inte deriverbar.

Som nämnts ovan innebär därför brownsk rörelse att man behöver ny matematik som kallas Ito-kalkyl efter innovatören. Låt $Y(t) = F[t, K(t)]$ vara en funktion som innehåller tiden och en variabel som beror på tiden, här en kapitalstock, som följer en brownsk rörelse. Första differentialen har då formen:

$$dY = \frac{\partial F}{\partial t}dt + \frac{\partial F}{\partial K}dK + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 F}{\partial K^2}dK^2 + O(dt) = \\ = \frac{\partial F}{\partial t}dt + \frac{\partial F}{\partial K}dK + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 F}{\partial K^2}\sigma^2 dt + O(dt) \tag{4.42}$$

där $\lim_{dt \to 0} O(dt) / dt = 0$ ($O(dt)$ är en restterm som kallas ordo dt). Vidare gäller att de termer som inte finns i andra ordningens derivator är $(\partial^2 F / \partial t^2)(dt)^2$ och $(\partial^2 F / \partial t \partial K) dtdK$. Dessa försvinner därför att de är ”andraordningstermer”, medan den tredje andraordningstermen som tillkommer finns i första differentialen därför att $E(dB^2) = \sigma^2 dt$.

Vi vet också att $dK(t, K)$, vilket innebär att vi kan skriva den stokastiska differentialen som

$$dK = \alpha(t, K)dt + \beta(t, K)dB \tag{4.43}$$

Här är $\alpha(t, K)$ och $\beta(t, K)$ deterministiska funktioner, där den fösta funktionen mäter den stokastiska differentialekvationens förändring över tiden (drift) och den andra funktionen utgör variansen hos den brownska processen $E[dB(t)] = 0$ och $E[dB^2(t)] = dK^2 = \sigma^2 dt$.

Vi kan nu substituera ekvationen (4.43) in i ekvationen (4.42) och erhåller:

$$dY = [\frac{\partial F}{\partial t} + \alpha(t, K)\frac{\partial F}{\partial K} + \frac{1}{2}\frac{\partial F^2}{\partial K^2}\sigma_k^2]dt + \beta(t, K)dB + O(dt) \tag{4.44}$$

Notera att reglerna för Ito-kalkylen innebär att

$$dK^2 = \alpha dt^2 + 2\alpha\beta dtdB + \beta^2 dB^2 = \beta^2 dB^2 + O(dt) = \\ \beta^2 dt + O(dt)$$

Orsaken är att dB kan representeras av $dB = \varepsilon\sqrt{dt}$ där $\varepsilon \sim N(0,1)$, vilket innebär att $dtdB = \varepsilon dt^{3/2} \propto dt^{3/2}$ ($\propto$ betyder ”proportionell mot”) är noll liksom $dt^2 = 0$ medan $dB^2 = \varepsilon^2 dt \propto dt$. Här är dB^2 av storleksordning dt. Vad vi har gjort ovan är att vi har skissat ett fundamentalt resultat som kallas Itos Lemma (hjälpsats) i en dimension.

Följande exempel kan till att börja med kanske hjälpa lite: Låt $Y = \ln K = F(K)$, där K följer en brownsk rörelse av följande slag

$$dK = \alpha K dt + \sigma K dB \tag{4.45}$$

Vi kan uppfatta funktionen $F(\bullet)$ som en produktionsfunktion, och vi har att

$$\frac{\partial F}{\partial t}=0, \frac{\partial F}{\partial K}=\frac{1}{K} \text{ och } \frac{\partial^2 F}{\partial K^2}=-\frac{1}{K^2}$$

vilket ger

$$dY=\frac{\partial F}{\partial t}dt+\frac{\partial F}{\partial K}dK+\frac{\partial^2 F}{\partial K^2}dK^2 \tag{4.46}$$

Efter substitutioner som ovan för dK får vi att:

$$dY=0+\frac{1}{K}(\alpha Kdt+\sigma KdB)-\frac{1}{2}\frac{1}{K^2}\sigma^2 dt=(\alpha-\frac{\sigma^2}{2})dt+\sigma dB \tag{4.47}$$

Med andra ord, (4.47) är den bakomliggande stokastiska differentialekvationen för hur produktionen rör sig över tiden.

EN STOKASTISK RAMSEY-MODELL

Vi ska nu ge Ramsey-modellen, som vi använde ovan, en stokastisk motsvarighet. Den underliggande modellen finns hos Merton (1975), men här optimerar vi med avseende på konsumtionen i stället för sparkvoten. Vi skall börja bakvägen genom att utnyttja en linjärt homogen produktionsfunktion där deprecieringen av kapitalstocken har beaktats. Produktionsfunktionen har utseendet $Y=F[K(t),L(t)]$ där $K(t)$ är kapitalstocken i tidpunkt t, $L(t)=L(0)e^{nt}$ är arbetskraften i tidpunkt t och $n=$tillväxten takten hos arbetskraften (0< $n<1$). Kapitalstocken under säkerhet rör sig enligt följande differentialekvation:

$$\dot{K}(t)=F[K(t),L(t)]-C(t) \tag{4.48}$$

där $C(t)$ är konsumtionen i tidpunkt t. Eftersom produktionsfunktionen är linjärt homogen kan vi skriva funktionen på en per capita basis genom att introducera $k(t)=K(t)/L(t)$, $c(t)=C(t)/L(t)$ och differentiera totalt med avseende på *t*. Efter lite manipulationer får vi differentialekvationen:

$$\dot{k}(t)=f[k(t)]-c(t)-nk(t) \tag{4.49}$$

Ekvation(4.49) är en variant av Robert Solows differentialekvation för hur kapitalstocken rör sig över tiden under fullständig säkerhet. Antag att differentialekvationen för arbetskraften bestäms av den stokastiska differentialekvationen

$$dL(t)=nL(t)dt+\sigma L(t)dB \tag{4.49'}$$

där n är tillväxttakten och σ är standardavvikelsen. Vi kan nu transformera osäkerheten beträffande tillväxten i arbetskraften till en osäkerhet i kapital per arbetare $k(t)=K/L=Z(t,L)$. Härledningen är inte trivial, men vi kan börja med systemet av differentialekvationer:

$$\begin{aligned} dK &= (F(K,L)-C)dt=(Lf(k)-C)dt \\ dL &= nLdt+\sigma LdB \end{aligned} \tag{4.50}$$

Vi kan nu använda Itos lemma för funktionen $k=Z(t,L)$ och vi erhåller:

$$dk=[f(k(t)-c(t)-(n-\sigma^2)k(t)]dt-k(t)\sigma dB(s) \tag{4.51}$$

där $c(t)$ konsumtionen per capita. I Appendix II visar vi hur den stokastiska differentialekvationen erhålls. Vi är nu redo att presentera det stokastiska Ramsey-problemet

$$V(s,k(s)) = \max_{c(t)} E_s\{\int_s^T u(c(t))e^{-\theta t}dt\} \tag{4.52}$$

$$dk = [f(k(t) - c(t) - (n-\sigma^2)k(t)]dt - k(t)\sigma dB(t) \tag{4.53}$$

$$k(s) = k_s \ , \ c(t) \geq 0$$

E_s är matematisk förväntan för målfunktion mätt från starttidpunkten *s*, $u(c(t))$ är den momentana nyttofunktionen, θ är nyttodiskonteringsräntan och T är tidpunkten för den första gång som kapitalstocken lämnar solvensmängden $G[k_\tau(\omega), k_\tau > 0]$, id est (dvs.) $T = \inf[\tau > s; k_\tau(\omega) \notin G]$. Med andra ord, den tidpunkt τ när kapitalstocken per capita inte är positiv och konsumenten således blir bankrutt. Om den slutgiltiga stokastiska differentialekvationen varit en ekvation av samma typ som ekvationen för ändringen av den stokastiska arbetskraften hade målfunktionen alltid gått mot oändligheten. En sådan ekvation kallas geometrisk brownsk rörelse. Här är detta ingen garanti, därför krånglar vi till det med T.

I många sammanhang är det realistiskt att anta att kontrollvariabeln $c(t)$ är betingad på tidigare observerade värden av kapitalstockens tillstånd. Matematiker skulle säga att kontrollprocessen är adapterad till tillståndprocessen $k(t)$. Här antar vi att den optimala kontrollfunktionen är en s.k. tids-autonom Markov-process av följande slag

$$c(t) = c(k(t)) \tag{4.54}$$

Ekvation (4.54) innebär att kontrollvariabeln vid tidpunkt t bara beror på tillståndsprocessen i samma tidpunkt[78]. I synnerhet innebär optimeringen att lösningen är oberoende av startpunkten.

Lösningen av det stokastiska optimeringsproblemet erhålls genom att använda den tidigare nämnda Hamilton –Jacobi–Bellman–ekvationen (HJB), som är en partiell differentialekvation. Den har följande utseende

$$-\frac{\partial V(t,k)}{\partial t} = \max_c[u(c(t)]e^{-\theta t} + \frac{\partial V(t,k)}{\partial k}h(k,c;n,\sigma) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 V(k,t)}{\partial k^2}\sigma^2 k^2] = H^*(k,c;n,\sigma) \tag{4.55}$$

där $V(t,k)$ är den optimala värdefunktionen uttryckt som ett nuvärde. På grund av att optimeringen är oberoende av startpunkten kan denna ekvation förenklas. Hämtas den optimala nuvärdesfunktionen från ekvation (4.52) kan det visas att följande likhet gäller:

$$e^{\theta t} V[s,k(s)] = E_s\{\int_s^T u(c^*(t))e^{-\theta(t-s)}dt\} = W[k(s)] \tag{4.56}$$

där $c^*(t)$ är den optimala kontrollen och $W(k(s))$ är mätt i ”löpande (skugg)priser” i period *t*. Vi kan nu skriva HJB-ekvationen i löpande värde på följande sätt:

---

[78] Man kan visa att en Markov-kontroll under brownsk rörelse är nästan ”lika bra” som om man betingar på hela förhistorien. Se Öksendahl (2003) kapitel 11.

$$\theta W(k(s)) = \max_{c(s)}[u(c(s)) + W_k(k(s))h(k(s), c(s); \sigma, n) + \frac{1}{2}\sigma^2 k^2 W_{kk}(k(s))\,] \tag{4.57}$$

där $h(k(s), c(s); \sigma, n) = f(k(t) - c(t) - (n - \sigma^2)k(t)$, $W_k = dW / dk$ och $W_{kk} = dW_{kk} / dk^2$. Notera här att om vi sätter $\sigma^2 = 0$ blir denna ekvation ”mycket lik” (densamma som) ekvation (4.9) ovan där Weitzmans teorem visar hur välfärden i ett deterministiskt dynamisk Ramsey-problem är proportionell mot Hamilton-funktionen. Det innebär att teoremet följer direkt ur HJB-ekvationen. Vi kan också notera att precis som under säkerhet finns en skuggprisvariabel (co-state variable) i form av derivatan av den optimala värdefunktionen, dvs. $W_k(s) = dW(s) / dk = p(s)$, vars andraderivata är $W_{kk} = d^2W / dk^2$. Löst uttryckt kan $-W_{kk}$ tolkas som priset på risk och $\sigma^2 k^2$ i ekvation (4.57) som storleken på risken.

COST-BENEFIT-ANALYS UNDER BROWNSK RÖRELSE

Eftersom co-state-variabler (skuggpriser) är ett specialfall av Ramsey-problemet under säkerhet kan man gissa att den optimala värdefunktionens partialderivator har en liknande roll att spela under osäkerhet. Speciellt kan vi gissa att värdefunktionens derivata med avseende på en parameter också kan användas som mätare av värdet av ett litet cost-benefit-projekt. Låt oss studera hur förändringen av skuggpriset mätt i löpande värde ser ut för det stokastiska Ramsey problemet. Vi startar med HJB-ekvationen där vi ersatt $dW(t) / dk$ med $p(t)$ och $d^2W(t) / dk^2 = dp(t) / dk$ mätt i löpande priser

$$\theta W(k(s)) = \max_{c(s)}[u(c(s)) + p(s)h(k(s), c(s); \sigma, n) + \frac{1}{2}\sigma^2 k^2 \frac{dp(s)}{dk}\,] = H^{c^*}(k, p, dp / dk) \tag{4.57a}$$

där $H^{c^*}(\bullet)$ är den (generaliserade) optimerade Hamilton-ekvationen i löpande priser. Vi kan också skriva om den stokastiska differentialekvationen för k

$$dk = h(c^*, k; n, \sigma)ds - \sigma k dB = H_k^{c^*}(k, p, \frac{dp}{dk})dt - \sigma k dB \tag{4.58}$$

där $H_k^{c^*}(*)$ är derivatan av Hamilton-funktionen med avseende på k. För att härleda egenskaperna hos co-state-variabeln, som kan skrivas i både löpande priser och i nuvärde, är det enklast att starta med skuggpriset i nuvärde, här betecknat $\bar{p} = V_k$. Om vi använder Itos formel och utnyttjar differentialekvationen ovan får vi

$$d\bar{p} = [V_{kt} + V_{kk}h + \frac{1}{2}V_{kkk}\sigma^2 k^2]dt - V_{kk}\sigma k dB \tag{4.59}$$

Eftersom $V_{kt} = V_{tk}$ följer det av ekvation (4.58) att

$$-V_{tk} = H_k + V_{kk}h + \frac{1}{2}V_{kkk}\sigma^2 k^2 \tag{4.60}$$

Substitution i (4.59) ger

$$d\bar{p} = -H_k^*(\bullet)dt - V_{kk}\sigma k dB \tag{4.61}$$

Så när som på termen för brownsk rörelse är högerledet ”densamma” som i ekvation (4.14) ovan.

Vi kan överföra ekvationen till löpande priser genom att utnyttja att $d\bar{p} = (dp - \theta p)e^{\theta t}dt$ vilket ger

$$dp - \theta p = -H_k^{c^*}(\bullet)dt - W_{kk}\sigma k dB \tag{4.62}$$

Notera att $H_k^* e^{\theta t} = H_k^{c^*}$.

Vi är nu klara att använda samma tricks som ovan när vi härledde cost-benefit-regeln under säkerhet. Säg att vi använder oss av parametern "tillväxt i arbetskraften" och skriver ändringen i tillväxttakten som:

$$dn = \sigma_n dB \tag{4.63}$$

Låt oss lägga in den som en ny tillståndvariabel. Genom att generalisera optimeringsproblemet på detta sätt kan vi skriva ändringen i nuvärdet av skuggpriserna på både kapitalet och tillväxttakten som:

$$\begin{aligned} d\overline{p} &= -H_k^*(\bullet)dt - V_{kk}\sigma k dB - V_{kn}\sigma_n k n dB_n \\ d\overline{p}_n &= -H_n^*(\bullet)dt - V_{nk}\sigma n k dB + V_{nn}\sigma_n dB_n \end{aligned} \tag{4.64}$$

Notera att blandade termer kommer in, vilket följer av att vi använder Itos lemma med fler än en tillståndsvariabel. Metodiken är dock precis densamma[79]. Resultatet blir bara lite krångligare att härleda. När detta är gjort är vi på banan igen. Notera också att nu är två av varandra oberoende ortogonala brownska rörelser involverade. Det går emellertid att lösa cost-benefit-problemet även om processerna skulle vara korrelerade.

För att nå fram till cost-benefit-regeln integrerar vi den stokastiska differentialekvationen för skuggpriset på tillståndsvariabeln n över intervallet $[t,T]$. Vi får:

$$p_n(T) = p_n(t) - \int_t^T H_n^*(s)ds - \int_t^T V_{nk} n k \sigma dB + \int_t^T V_{nn}\sigma_n dB_n \tag{4.65}$$

På grund av ett *transversalitetsvillkor* blir $p_n(T) = 0$, d.v.s. när man är bankrutt är en enhet kapital värdelös. Vi kan därför skriva:

$$p_n(t) = \int_t^T H_n^*(s)ds + \int_t^T V_{nk} n k \sigma dB - \int_t^T V_{nn}\sigma_n dB_n \tag{4.66}$$

vilket blir projektets värde. Numeriskt är detta uttryck mycket svårt att hantera, men det finns en väg till något som är mer lätthanterligt. Vi tar helt enkelt matematisk förväntan av ekvation (4.66) varvid alla integraler försvinner utom den över Hamilton-funktionens derivata med avseende på n[80]:

$$E_t[p_n] = E_t[\int_t^T H_n^* ds] \tag{4.67}$$

Resultatet blir då i formen mycket likt det som erhölls under säkerhet i ekvation (4.16) ovan.

Slutsatser: *Dynamisk cost-benefit-analys för små projekt under osäkerhet ger upphov till resultat som under matematisk förväntan kan bli mycket lika motsvarande dynamiska resultat under säkerhet. Orsaken är*

[79] Se Aronsson, Löfgren Nyström (2003)

[80] Orsaken är att Ito-integralerna blir noll när man tar matematisk förväntan.

egenskaperna hos brownsk rörelse och den Ito-kalkyl som hanterar integration på ett sätt som gör att stokastiska inkrement blir noll under matematisk förväntan.

Det kan förefalla som att slutsatsen blir att det är mindre viktigt att adressera osäkerhet i utvärderingar. I ett avseende är emellertid detta inte fallet. Vi skall kortfattat, när vi nu känner grunderna för den s.k. Ito-kalkylen, beröra några enkla problem kring modern investeringsteori. Men först ett räkneexempel.

Ett övningsexempel

Ett räkneexempel kan vara på sin plats. Följande exempel på en cost-benefit-regel under osäkerhet finns hos Aronsson et. al. (2003) där grundexemplet är hämtat från Öksendahl (2003). Utgångspunkten är ett minimeringsproblem som har utseendet

$$V(t,x) = \min_c E_t[\int_t^\infty (x^2(s) + c^2(s))e^{-\rho s} ds]$$

Där den underliggande processen har utseendet

$$dx(s) = c(s)ds + \gamma\sigma dB(s)$$
$$x(t) = x_t$$

där $x(s)$ är tillståndsvariabeln, $c(s)$ är kontrollvariabeln och γ är den parameter som bestämmer cost-benfit-regeln. För att härleda regeln genom att derivera den optimala värdefunktionen med avseende på parametern γ definierar vi co-state variabeln i nuvärde $\tilde{p}_\gamma = V_\gamma(\bullet)$ och beräknar väntevärdet $E_t(\tilde{p}_\gamma)$ där index t indikerar att väntevärdet tas från processens starttidpunkt. Problemet kan lösas genom att vi löser det stokastiska kontrollproblemet fullständigt innan vi deriverar värdefunktionen med avseende på γ och tar matematisk förväntan. HJB-ekvationen vid tidpunkten t är

$$-\frac{\partial V}{\partial t} = \min_c [e^{-\rho t}(x^2 + c^2) + c\frac{\partial V(t,x)}{\partial x} + \frac{1}{2}\sigma^2\gamma^2 \frac{\partial^2 V(t,x)}{\partial x^2}] \quad c$$

Minimering med avseende på c (i varje tidpunkt) ger:

$$c = -\frac{1}{2}e^{\rho t}\frac{\partial V(t,x)}{\partial x}$$

Efter substitutioner av yttrycket för konsumtionen in i HJB ekvationen får vi efter lite räkningar att

$$0 = e^{-\rho t}x^2 - \frac{1}{4}e^{\rho t}(\frac{\partial V(t,x)}{\partial x})^2 + \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2\gamma^2\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}$$

För att kunna gå vidare måste vi ha ett ”Blueprint” för värdefunktionen, och vi gissar på följande separabla värdefunktion[81]

$$V(t,x) = e^{-\rho t}\phi(x), \; och\, \phi(x) = ax^2 + b$$

[81] Diskonteringsfaktorn separeras från grundfunktionen där tillståndsvariabeln finns.

Har vi gissat rätt framgår detta av problemets lösning. Om vi använder vår gissning får vi att

$$c = -ax$$

Om vi substituerar detta in i HJB-ekvationen får vi

$$x^2(1-\rho a - a^2) + \sigma^2\gamma^2 a - \rho b = 0 \qquad (*)$$

Detta är endast möjligt om

$a^2 + \rho a - 1 = 0$ och $b = \sigma^2\gamma^2 a / \rho$

Den positiva roten är

a=$\frac{1}{2}[-\rho + \sqrt{\rho^2 + 1}]$

Man kan också visa att värdefunktionen $V(t,x) = e^{-\rho t}(ax^2 + b) = e^{-\rho t}(x^2 + \sigma^2\gamma^2 / \rho)a$ satisfierar alla villkor i Teorem 11.2.2 i Öksendahl 1995/2003, vilket visar att problemet är löst och har en unik lösning[82]. Deriverar vi värdefunktionen erhålls cost-benefit-analysens utfall eller resultat

$$\bar{p} = \frac{\partial V}{\partial b}\frac{\partial b}{\partial \gamma} = 2e^{-\rho t}\sigma^2\gamma a / \rho$$

Eftersom inga stokastiska variabler ingår i co-state variabeln behöver vi inte ta förväntan.

Vill vi lösa problemet med hjälp av en generaliserad Hamilton-funktion som deriveras med avseende på γ och integreras kan vi skriva om ekvation ($*$) på följande sätt

$$\rho V = e^{-\rho t}[x^2(1-a^2) + \sigma^2\gamma^2 a = H(\bullet)$$

Efter derivering med avseende på γ och integration erhålls

$$\tilde{p} = \int_t^\infty H_\gamma(s)ds = 2e^{-\rho t}\sigma^2\gamma a / \rho$$

Notera emellertid att om $\sigma^2 = 0$ blir utfallet noll. Med andra ord, även om den generaliserade Hamilton-funktionen liknar den deterministiska till utseendet blir innehållet typiskt annorlunda.

DEN NYA INVESTERINGSTEORIN UNDER OSÄKERHET

Vi har i det första kapitlet hanterat vad vi kan kalla den klassiska investeringsteorin, och gjort nuvärdesberäkningar av kostnader och intäkter som varit givna från början. Vi har alltså bortsett från hur investeringsbeslutet hanterats. Den nya investeringsteorin under osäkerhet tillåter att investeringen kan få anstå till en framtida tidpunkt (som är optimal givet problemets struktur). Man talar om ”optimal stopping” (en optimal stopptidpunkt). Givet problemets struktur optimeras tidpunkten för när investeringen skall genomföras.

Antag att en investering har följande karaktäristika

[82] Teoremet visar att lösningen ger både nödvändiga och tillräckliga villkor för minimum. I övrigt glöm!

a) Den är partiellt eller komplett irreversibel. Det vill säga, vi kan inte återvinna det som investerats, därför att kostnaderna inte kan återvinnas (är nedlagda (sunk costs)).

b) De framtida nettointäkterna är okända.

c) Investeraren har en möjlighet att skjuta fram investeringsbeslutet för att erhålla mer information, dock (vanligen) utan att erhålla fullständig information.

Den nya investeringsteorin innebär i grunden en optionsansats[83]. Det vill säga, ett företag som har tillgång till en investeringsmöjlighet har ett finansiellt instrument- en köpoption (call option) - som gör att det kan välja att investera eller att avstå. När företaget har gjort en irreversibel investering dödar det möjligheten att använda sin option. Företaget kan således inte vänta på ytterligare information som kan påverka tidpunkten för investeringen. Värdet av den förlorade optionen är en alternativkostnad (opportunity cost) som skall läggas till kostnaden för investeringen. Detta rimmar inte med nuvärdesmetoden som innebär att man investerar om nuvärdet är icke-negativt. I optionsansatsen blir det frågan om att investeringen måste täcka både investeringskostnaden och värdet av den förlorade optionen. Det senare värdet kan bli betydande, och det kan rejält överskugga nuvärdet. Ett exempel är på sin plats.

Ett försök att illustrera en investerings optionsvärde

Låt oss studera ett mycket enkelt fall för att illustrera några centrala begrepp när riskabla investeringar skall utvärderas. I synnerhet vill vi visa hur Black-Scholes formel för värdering av en option kan användas, kanske i en känslighetsanalys av en irreversibel investerings lönsamhet[84].

Vi gör en "sonderande" initiell investering om 50 (låt oss säga miljoner kr) för att under några år närmare undersöka en möjlighet att lönsamt genomföra en huvudinvestering (som kanske kan rädda en utrotningshotad art). Genomförs huvudinvesteringen sker det år 4 och kostnaden bedöms för närvarande bli 400. Nuvärdet i dag av nettointäkterna beräknas till 300. Således framstår projektet som rejält olönsamt. Är diskonteringsräntan 3 procent så blir nuvärdet

$$NPV = S - I_0 - K \cdot e^{-r \cdot T} = 300 - 50 - 400 \cdot e^{-0.03 \cdot 4} \approx -104.8 \qquad (4.68)$$

där S är nuvärdet i dag av huvudinvesteringens förväntade nettointäkter, I_0 är den initiella investeringen, K är den förväntade kostnaden (år 4) för huvudinvesteringen, r är diskonteringsräntan och T är tiden till det att huvudinvesteringen genomförs.

Det är den konventionella nuvärdeskalkylen. Den bortser från att vi har optionen att avstå från huvudinvesteringen, dvs. sämsta tänkbara utfall är – 50 (och inte – 104.8). Frågan är om det ger hela bilden. Låt os anta att S följer en geometrisk, brownsk rörelse, dvs. den är lognormalfördelad och dess förändring över tiden är normalfördelad med konstant varians. Huvudinvesteringens optionsvärde kan (givet dessa och andra antaganden) beräknas med hjälp av Black-Scholes formel

$$C = N(d_1) \cdot S - N(d_2) \cdot Ke^{-r \cdot T} \qquad (4.69)$$

[83] Brukar kallas för en real optionsansats till skillnad från en finansiell option.
[84] Angreppssättet är *inte* tillämpligt om förloppet är reversibelt. Ett exempel på en reversibel åtgärd är att vatten avleds från elproduktion till en torrfåra för att generera miljövärden. Förloppet kan naturligtvis reverseras, t.ex. om elpriset stiger kraftigt. I det exempel som studeras här kan den initiella investeringen inte återvinnas.

där C är optionsvärdet, $N(.)$ är den kumulativa sannolikhetsfördelningen för den standardiserade normalfördelningen, och d_i är en parameter (i=1,2)[85]. Parametrarna definieras som

$$d_1 = \frac{\ln(\frac{S}{K}) + (r + \frac{\sigma^2}{2}) \cdot T}{\sigma \cdot \sqrt{T}}$$

och

$$d_2 = d_1 - \sigma \cdot \sqrt{T},$$

där σ mäter investeringens volatilitet (standardavvikelse). Vi antar här att σ är 0.4 (kanske beräknad utifrån bästa tänkbara nuvärdesintäkt/lägsta möjliga nuvärdesintäkt för huvudinvesteringen[86]).

I vårt exempel blir optionsvärdet

$$C = N(0.19) \cdot 300 - N(-0.61) \cdot 400 \cdot e^{-0.12} \approx 76.3 \tag{4.70}$$

dvs. det är lönsamt att genomföra den initiella investeringen (eftersom 76.3 – 50 > 0). Alternativt skulle man kunna ta en initiell investering på upp till drygt 76. Exemplet illustrerar värdet av *flexibilitet*.

Några jämförelser av olika investeringsmodeller

McDonald och Siegel-modellen från 1986 är ett välkänt exempel på ett företags irreversibla investering under osäkerhet[87]. Eftersom vi har berört Ito-kalkylen ska vi studera huvuddragen.

Deras problem är att finna den tidpunkt vid vilken det är optimalt att investera i ett projekt som har värdet V, givet att V drivs av en process som vi nu känner som en genometrisk brownsk rörelse

$$dV(t) = \alpha V(t)dt + \sigma V(t)dB \tag{4.71}$$

$$V(0) = V_0$$

Den här ekvationen förenklar lösningen av problemet, men den är orealistisk i ett avseende. Värdet av projektet kan nämligen aldrig bli negativt. Orsaken är att när man löser den stokastiska differentialekvationen får man

$$V(t) = V_0 \exp[(\alpha - \frac{\sigma^2}{2})t + \sigma B(t)] \tag{4.72}$$

Ett uttryck som inte kan bli negativt. Formen på värdet av projektet blir på grund av formen på lösningen av differentialekvationen lognormalt fördelad.

Man kan jämföra företagets investeringsmöjlighet med en evig köpoption där ägaren har en rättighet men ingen skyldighet att när som helst köpa en aktie till ett förutbestämt pris. Black and Scholes

---

85 I termer av en aktie kan S uppfattas som börskursen och K som optionens lösenpris vid tidpunkt T.

86 Ett förslag är att beräkna σ som $\sigma = \ln(S_{opt} / S_{pes}) / 4 \cdot \sqrt{T^h}$ där *opt* (*pes*) refererar till bästa (sämsta) möjliga utfall för nettointäkterna och T^h är projektets (antagna) livslängd. Se ekvation (6 – 4) i Kodukula och Papudesu (2006).

87 Exemplet från McDonald och Siegel finns också hos Dixit och Pindyck (1993).

formel för en köpoption skiljer sig från vår option genom att den måste köpas vid en given tidpunkt eller överges vid samma givna tidpunkt. Man kan lösa för den optimala tidpunkten på flera olika sätt, antingen via stokastisk dynamisk programmering, en optionsprismetod eller också använda sig av en verifikationsmetod (vad lösningen skall innehålla i form av s.k. variationslikheter). Vi kan skriva optionen att investera som

$$F(V) = \max E[(V_T - I)e^{-\theta T}] \tag{4.73}$$

Där E är operatorn för väntevärdet, T är den okända framtida tidpunkten där investeringen görs och $e^{-\theta t}$ är diskonteringsfaktorn. Vidare är ekvationen i (4.71) den underliggande stokastiska differentialekvationen som styr värdet hos investeringen. Vi måste också anta att $\theta > \alpha$ annars går värdet i (4.71) till oändligheten.

Om vi låter variansen bli noll som ovan i samband med övergången från en stokastisk Ramsey-modell till en deterministisk kan vi lösa optimeringsproblemet genom att lösa $V(t)$ genom den återstående deterministiska differentialekvationen

$$\frac{dV(t)}{dt} = \alpha V(t)\ ,\ V(0) = V_0 \tag{4.74}$$

vilket ger:

$$V(T) = V_0 e^{\alpha T} \tag{4.75}$$

Om $\alpha \leq 0$ bör man snarast möjligt investera eftersom värdet på projektet faller över tiden. Med andra ord, man ska investera i tidpunkten noll om $V \geq I$ och $F(V) = \max[V - I, 0]$.

Om $0 < \alpha < \theta$ är $F(V) > 0$ även om $V < I$ vid tidpunkten t i löpande värde och $F(V)$ kan naturligtvis vara optimalt även om $V > I$ vid tidpunkten t. Derivering av värdefunktionen

$$F(V) = (V_0 e^{\alpha T} - I)e^{-\theta T} \tag{4.73a}$$

med avseende på T ger

$$\frac{dF(V)}{dT} = \theta I e^{-\theta T} - (\theta - \alpha)V_0 e^{-(\theta-\alpha)T} = 0 \tag{4.76}$$

Lite tricks med den naturliga logaritmen ger

$$T^* = \max\{\frac{1}{\alpha}\ln[\frac{\theta I}{(\theta-\alpha)V}], 0\} \tag{4.77}$$

Notera att så snart som $V > I$, om än bara marginellt, är $T^* > 0$. Skälet till att man skjuter investeringen framåt i tiden även i det deterministiska fallet är att kostnaden för investeringen diskonteras med en högre ränta än intäkten[88].

[88] Andra ordningens villkor för optimum kräver att $\alpha > 0 \, och \, \theta > \alpha$.

Vid vilka värden på V skall man investera omedelbart? Genom att sätta $T^* = 0$ i ekvation (4.76) framgår att man ska investera omedelbart så snart som $V \geq V^* = \theta I / (\theta - \alpha) \geq 1$. Efter att ha substituerat (4.76) in i (4.73a) får vi till sist de deterministiska lösningarna

$$F(V) = \begin{bmatrix} \{\alpha I / (\theta - \alpha)\}\{(\theta - \alpha)V / \theta I\}^{\frac{\theta}{\alpha}} \;\; \textit{för}\, V \leq V^* \\ V - I \;\; \textit{för}\, V > V^* \end{bmatrix} \tag{4.78}$$

Vad denna analys illustrerar är att också i en värld utan osäkerhet så finns det skäl att diskutera *när* en investering bör genomföras. Det konventionella nuvärdeskriteriet förbiser eller ignorerar denna beslutsdimension genom att det accepterar/tillstyrker en investering om dess nuvärde är positivt.

Låt oss nu gå till det stokastiska fallet där variansen är positiv. I grunden är dock problemet detsamma. Vi ska hitta en punkt eller barriär vid vilken det blir optimalt att investera I för att få en tillgång värd V. Eftersom V följer en stokastisk process är det inte möjligt att en gång för alla, till skillnad för det deterministiska fallet, bestämma den optimala investeringstidpunkten. Här blir det istället fråga om ett kritiskt värde (reservationsvärde) V^* där det blir optimalt att investera när $V \geq V^*$. Innan detta har inträffat talar man om en fortsättningsregion där $V < V^*$ och för den regionen är HJB-ekvationen den relevanta partiella differentialekvationen.

HJB-ekvationen gäller i fortsättningsregionen med gränsvillkor, och kan här kompakt skrivas som

$$\theta F dt = E(dF) \tag{4.79}$$

Vänsterledet anger att över intervallet dt är den totala förväntade avkastningen på investeringsmöjligheten, $\theta F dt$, lika med den förväntade apprecieringen av kapitalet. Notera att ekvationens *vänsterled* överensstämmer med det i ekvation (4.45a) ovan i HJB-ekvationen. Låt oss nu undersöka hur högerledet i (4.79) kan tolkas. $E(dF)$ kan utvecklas med hjälp av Itos lemma. Differentialen skrivs som

$$dF = \frac{dF}{dV} dV + \frac{1}{2} \frac{d^2F}{dV^2} dV^2 \tag{4.80}$$

Därefter substituerar vi för dV som finns i ekvation (4.60) och får[89]:

$$dF = \frac{dF}{dV} (\, dF = \frac{dF}{dV} (\alpha V dt + \sigma V dB) + \frac{1}{2} \sigma^2 V^2 dt \tag{4.81}$$

Genom att ta matematisk förväntan av dF försvinner termen med dB eftersom $E(dB) = 0$.

Dividerar vi båda leden i den första ekvationen med dt följer nedanstående HJB-ekvation som vi känner igen från (4.45) ovan

$$\theta F = \alpha V \frac{dF}{dV} + \frac{1}{2} \sigma^2 V^2 \frac{d^2F}{dV^2} \tag{4.82}$$

---

[89] Den sista termen i uttrycket (4.58) erhålls genom att $dV^2 = (\alpha V dt + \sigma V dB)^2 = \sigma^2 V^2 dB^2 = \sigma^2 V^2 dt$ i enlighet med Ito-kalkylen.

Detta är en andra ordningens differentialekvation som ska lösas med avseende på utseendet på funktionen $F(V)$. Denna funktion skall dessutom satisfiera vissa gränsvillkor. Det fullständiga problemet kan skrivas på följande sätt

$$\frac{1}{2}\sigma^2 V^2 \frac{d^2F}{dV^2} + \alpha V \frac{dF}{dV} - \theta F = 0 \tag{4.80a}$$

$$F(0) = 0,\ F(V^*) = V^* - I,\ \frac{dF(V^*)}{dV} = 1 \ \textbf{och}\ \theta > \alpha \tag{4.80 b}$$

Funktionen måste bli noll i punkten noll därför att den geometriska brownska rörelsen inte kan bli negativ. Se lösningen i ekvation (4.61) ovan. Det andra villkoret är att värdet av funktionen F i den punkt där det är optimalt att investera (reservationsvärdet V^*) är kapitalvärdet $V^* - I$. Till sist så måste funktionen vara kontinuerlig och deriverbar i reservationsvärdet, annars finns det ett bättre "alternativvärde". Detta villkor brukar kallas "the smooth pasting condition".

Givet gränsvillkoren måste gälla att $F(V) = AV^{\beta}$, där A är en positiv konstant och β är en positiv parameter som bestäms av andra parametrar (σ, θ, α). Funktionens första derivata är $d(AV^{\beta})/dV = \beta(AV^{\beta-1})$ och dess andra derivata är $(\beta-1)\beta AV^{\beta-2}$. Insättning av dessa derivator i ekvation (4. 80a) ger

$$\begin{aligned} &\frac{\sigma^2}{2}(\beta-1)\beta V^2 AV^{\beta-2} + \alpha V \beta AV^{\beta-1} - \theta AV^{\beta} = \\ &\frac{\sigma^2}{2}(\beta-1)\beta + \alpha\beta - \theta = 0 \end{aligned} \tag{4.83}$$

Rötterna blir

$$\beta_1 = \frac{1}{2} - \alpha/\sigma^2 + [(\alpha/\sigma^2 - 1/2)^2 + 2\alpha/\sigma^2]^{\frac{1}{2}} > 1$$

$$\beta_2 = \frac{1}{2} - \alpha/\sigma^2 - [(\alpha/\sigma^2 - 1/2)^2 + 2\alpha/\sigma^2]^{\frac{1}{2}} < 0$$

Den allmänna lösningen på andraordningsekvationen blir

$$F(V) = A_1 V^{\beta_1} + A_2 V^{\beta_2}$$

Gränsvillkoret $F(0) = 0$ implicerar emellertid att $A_2 = 0$ (roten är icke positiv och A_2 som måste sättas till noll). Därmed är β_1 den återstående roten. För att bestämma V^* och A_1 substituerar vi $A_1 V^{\beta_1}$ in i målfunktionen och smooth pasting-villkoret

$$\begin{aligned} &A_1 V^{*\beta_1} = V^* - I \\ &\beta A_1 V^{*\beta_1 - 1} = 1 \end{aligned} \tag{4.84}$$

Vi får

$$V^* = \frac{\beta_1}{\beta_1 - 1} I$$

$$A_1 = (\beta_1 - 1)^{\beta - 1} / [\beta_1^{\beta_1} I^{\beta_1 - 1}]$$

Vi kan direkt se att eftersom $\beta_1 > 1$ får vi en lösning som innebär att $V^* > I$, vilket innebär att nuvärdesregeln blir felaktig, En irreversibilitet och osäkerhet gör att det blir en kil mellan *det kritiska värdet för en investering* och investeringen.

Sammanfattning: *En optimal investering som är partiellt irreversibel, osäker och möjlig att skaffa information om genom att vänta och se avviker ifrån den s.k. nuvärdesregeln som används under säkerhet, därför att optionen att vänta "lite längre" har ett värde.*

Relationen till neoklassisk investeringsteori kan också studeras genom att vi jämför optionsteorin med Tobins q, vilket introducerades i en uppsats ifrån 1969. (Norska ekonomer vet att detta redan var gjort 1960 av Tryggve Haavelmo i boken A Study in the Theory of Investment.) Haavelmos-Tobins q definieras som kvoten mellan värdet av existerande kapitalvaror i förhållande till vad de kostar att installera dem. EnligtHaavelmos-Tobins q bör man investera så snart som q överstiger ett. Man skulle dock se q som en marginell storhet som i optionstermer innebär att om ett projekt som har värdet V och optionsvärdet $F(V)$ är installerade skall företagets värde öka med $V - F(V)$. I detta fall skulle q definieras som [$V - F(V)$]/I och man skall investera så länge som det marginella q - värdet är större än eller lika med ett $q^m \geq 1$. Det kritiska värdet svarar emot likheten $F(V^*) = V^* - I$. Däremot om vi definierar q som V / I (ett genomsnittligt q), d.v.s. när optionen att investera redan är utförd kan det korrekta investeringskriteriet bestämmas på följande sätt $q^* = V^* / I = \beta_1 / (\beta_1 - 1) > 1$. Dixit och Pindyck kallar det första kriteriet *net of option value* och det andra the *value of the firm criterion.*

Båda kriterierna slår Haavelmos och Tobins q under osäkerhet.

Appendix I: Hjälp med härledningar av tre CBA regler i kapitel 4.

"Formlerna för ***Påstående 2* och 3** ger samma resultat. Det gör också ***Påstående 1***, men det är något svårare att bevisa".

Den tredje regeln är mycket välkänd (se t.ex. hos Arrow et.al.2003; Dasgupta 2001), Dixit et al.1980 men den innebär liksom den andra regeln att man måste involvera indirekta effekter under projektperioden. Det första påståendet är relativt nytt och innehåller enbart projektet som sådant. Det andra påståendet är på gränsen till trivialt, och vi arbetar med det trredje och första påståendena. Vi startar med att skriva den optimala värdefunktionen i form av ett enkelt trick.

$$W_0^*(\alpha) = \int_0^\infty u(\mathbf{c}^*(t,\alpha),\alpha)e^{-\theta t}dt = \int_o^\infty \{u[\mathbf{c}^*(t.\alpha),\alpha] + \lambda(t,\alpha)[\mathbf{I}^*[\mathbf{c}(t,\alpha),\mathbf{k}^*(t,\alpha),t,\alpha] - \dot{\mathbf{k}}^*(t,\alpha)]\}\,\mathrm{dt} \quad (1)$$

För att klargöra vad som är cost-benefit-regeln skriver vi nyttofunktionen på följande sätt $u[c(s,\alpha) + \delta(\alpha)]$ där $\delta(\alpha) = 0$ före projektet har initierats och $\alpha = \alpha_0$. En direkt effekt av projektet skall vara $\frac{\partial u[\mathbf{c}^*(s,\alpha),\alpha]}{\partial \alpha} = \frac{\partial u[\mathbf{c}^*(s,\alpha),\alpha]}{\partial c}\frac{\partial \delta(\alpha)}{\partial \alpha}$ och den andra diekta effekten är $\boldsymbol{\lambda}(t,\alpha)\frac{\partial \mathbf{I}^*}{\partial \alpha}$.

Genom att totaldifferentiera den optimala värdefunktionen med avseende på α får vi

$$dW_0 = \int_0^\infty \{\frac{\partial u^*}{\partial \mathbf{c}}[\frac{\partial \mathbf{c}^*}{\partial \alpha}\frac{\partial \delta}{\partial \alpha}] + \boldsymbol{\lambda}(t,\alpha)[\frac{\partial \mathbf{I}^*}{\partial \mathbf{c}}\frac{\partial \mathbf{c}^*}{\partial \alpha} + \frac{\partial \mathbf{I}^*}{\partial \mathbf{k}}\frac{\partial \mathbf{k}^*}{\partial \alpha} + \frac{\partial \mathbf{I}^*}{\partial \alpha} - \frac{\partial \dot{\mathbf{k}}^*}{\partial \alpha}] + \frac{\partial \boldsymbol{\lambda}(t,\alpha)}{\partial \alpha}[\mathbf{I}^*(\bullet) - \dot{\mathbf{k}}^*(\bullet)]\}\, \mathrm{e}^{-\theta t}\, dt$$

(2)

Den sista termen i uttrycket är lika med noll eftersom $\mathbf{I}^* = \dot{\mathbf{k}}^*$. Vi förenklar också genom att integrera termen $\boldsymbol{\lambda}\frac{\partial \dot{\mathbf{k}}^*}{\partial \alpha}$ och vi får

$$\int_0^\infty \boldsymbol{\lambda}(t,\alpha)\frac{\partial \dot{\mathbf{k}}^*}{\partial \alpha}e^{-\theta t}dt = [\boldsymbol{\lambda}(t,\alpha)\frac{\partial \mathbf{k}^*}{\partial \alpha}]_0^\infty - \int_0^\infty [\dot{\boldsymbol{\lambda}}^*(t,\alpha) - \theta\boldsymbol{\lambda}^*(t,\alpha)]\frac{\partial \mathbf{k}^*}{\partial \alpha}\, \mathrm{e}^{-\theta t}\, dt = -\int_0^\infty \mathrm{s}^*(t,\alpha)\frac{\partial \mathbf{k}^*}{\partial \alpha}e^{-\theta t}dt$$

(3)

Här kan $s(t,\alpha)$ tolkas som kostnaden att hålla kapitalet i en infinitesimal period dt. Den andra komponenten blir noll på grund av att $k(0)$ är fast och att tranversalitetsvillkoret går till oändligheten som noll. Vi kan nu skriva den första ekvationen på följande sätt:

$$dW_0(\alpha) = \int_0^\infty \{\frac{\partial u^*}{\partial \mathbf{c}}[\frac{\partial \mathbf{c}^*}{\partial \alpha} + \frac{\partial \delta}{\partial \alpha}] + \boldsymbol{\lambda}(t,\alpha)[\frac{\partial \mathbf{I}^*}{\partial \mathbf{c}}\frac{\partial \mathbf{c}^*}{\partial \alpha} + \frac{\partial \mathbf{I}^*}{\partial \mathbf{k}}\frac{\partial \mathbf{k}^*}{\partial \alpha} + \frac{\partial \mathbf{I}^*}{\partial \alpha}] + \mathbf{s}^*(t,\alpha)\frac{\partial \mathbf{k}^*}{\partial \alpha}\}e^{-\theta t}dt \quad (4)$$

Uttrycket i ekvation fyra kan emellertid förenklas ytterligare. Till att börja med skall vi reducera projektet från en oändlig horisont till ett ändligt intervall [0,T]. På grund av att de nödvändiga villkoren för optimum $\frac{\partial u^*}{\partial c} + \boldsymbol{\lambda}(t,\alpha)\frac{\partial \mathbf{I}}{\partial c} = 0$ och $\dot{\boldsymbol{\lambda}} - \theta\boldsymbol{\lambda} = -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{k}}$ längs med banan $\alpha = \alpha_0$ och de direkta effekterna av projektet finns bara inom projektperioden [0,T].

Genom att dividera den marginella nyttan med den inkomsten i en nyttometrik μ får vi prisvektorerna $\mathbf{p}^*(t) = \frac{\partial u^*}{\partial \mathbf{c}} / \mu(t)$. $\mathbf{q}^*(t) = \boldsymbol{\lambda}^*(t)/\mu(t)$ och $\boldsymbol{\kappa}^*(t) = \mathbf{s}^*(t)/\mu(t)$ for konsumtion, investeringar och kapital och vi kan skriva

$$dW_0(\alpha) = \int_0^T [\mathbf{p}^*(t)\Delta c + \mathbf{q}^*(t)\Delta\mathbf{I}(t) + \boldsymbol{\kappa}^*(t)\Delta\mathbf{k}]\mu(t)e^{-\theta t}dt$$

där $\Delta\mathbf{c} = (\frac{\partial \mathbf{c}}{\partial \alpha} + \frac{\partial \delta}{\partial \alpha})d\alpha, \Delta\mathbf{I} = (\frac{\partial \mathbf{I}^*}{\partial \mathbf{c}}\frac{\partial \mathbf{c}^*}{\partial \alpha} + \frac{\partial \mathbf{I}^*}{\partial \mathbf{k}}\frac{\partial \mathbf{k}}{\partial \alpha})d\alpha$ och $\Delta\mathbf{k} = \frac{\partial \mathbf{k}^*}{\partial \alpha}d\alpha$

Eftersom $\dot{\mu} = \mu(t)[r(t) - \theta]$, $\mu(0) = \mu_0$ kan vi lösa differentialekvationen och byta ut $\mu(t)e^{-\theta t}$ i stället för $\mu(0)e^{-\int_0^t r(\tau)d\tau}$ och sätta $\mu(0) = \mu_0 = 1$. *Detta bevisar Påstående 3, det vill säga*

$$dW_0(\alpha) = \int_0^T [\mathbf{p}^*(t)\Delta\mathbf{c} + \mathbf{q}^*(t)\Delta\mathbf{I}(t) + \boldsymbol{\kappa}^*(t)\Delta\mathbf{k}]e^{-\int_0^t r(\tau)d\tau} dt$$

Nu kan vi också visa att de två sista termerna i integranden är en exakt differential sådan att

$$\int_0^T [\mathbf{q}^*(t)\Delta\mathbf{I}(t) + \boldsymbol{\kappa}^*(t)\Delta\mathbf{k}(t)]e^{-\int_0^t r(\tau)d\tau} dt = \mathbf{q}^*(T)\Delta\mathbf{k}(T)[\mathrm{e}^{-\int_0^T r(\tau)d\tau} \tag{5}$$

Notera att $\Delta k(0)$ är fast! Ekvation (5) visar att hur framtiden ser ut för konsumtionen från $[\mathrm{T}\,\infty)$, d.v.s. att

$$\int_T^\infty \mathbf{p}^*(t)\,\mathrm{d}\,\mathbf{c}(t)e^{-\int_t^\infty r(\tau)d\tau d} dt = \mathbf{q}^*(T)\Delta\mathbf{k}(T)[\mathrm{e}^{-\int_0^T r(\tau)d\tau}$$

Detta följer av att vi kan ta isär Påståendena 2 och 3. Från Påstående 3 kan vi genom envelopp egenskaper förenkla påstående 3 till Påstående 1. För tydlighet använder vi ekvation 4 och vi får

$$[\frac{\partial u^*}{\partial \mathbf{c}} + \boldsymbol{\lambda}(t,\alpha)\frac{\partial \mathbf{I}^*}{\partial \mathbf{c}}]\frac{\partial \mathbf{c}^*}{\partial \alpha} = 0 \text{ och } \mathbf{s}^*(t,\alpha)\frac{\partial \mathbf{k}^*}{\partial \alpha} + \lambda(\mathrm{t},\alpha)\frac{\partial \mathbf{I}^*}{\partial \mathbf{k}}\frac{\partial \mathbf{k}^*}{\partial \alpha} = -[\frac{\partial H^*}{\partial \mathbf{k}} - \frac{\partial H^*}{\partial \mathbf{k}}]\frac{\partial \mathbf{k}^*}{\partial \alpha} = 0$$

Vi kan därmed bevisa **Påståendet 1** i huvudtexten. Vi får $d\widehat{\mathbf{c}}(t) = \frac{\partial \delta(t,\alpha)}{\partial \alpha} d\alpha,\ d\widehat{\mathbf{I}}(t) = \frac{\partial \mathbf{I}}{\partial \alpha} d\alpha$ och Påståendet lyder:

$$\int_t^T [\mathbf{p}^*(s)\mathbf{d}\widehat{c}(\mathrm{s}) + \mathbf{q}^*(s)\,\mathrm{d}\widehat{\mathrm{I}}(\mathrm{s}]\mathrm{e}^{-\int_t^T r(\tau)d\tau} ds$$

Appendix II: Hjälp med en härledning av differentialekvrtionen för kapitalstocken per capita via Ito's Lemma

Många duktiga matematiker har haft en del problem med nedanstående härledning. Låt oss starta med den stokastiska differentialekvationenekvation

$$dL = nL(t)dt + \sigma L(t)dB(t)$$

Vi kan nu tranformera osäkerheten av tillväxten i arbetsstyrkan till en osäkerhet om tillväxten i kapitalstocken per capita $k(t) = K(t)/\mathrm{L}(t)$. Vi startar genom att definiera $k(t) = Z(t, \mathrm{L(t)})$ och använda Ito's Lemma för att erhålla

$$dk = \frac{\partial Z}{\partial t}dt + \frac{\partial Z}{\partial L}dL + \frac{1}{2}[\frac{\partial^2 Z}{\partial K^2}dK^2 + 2\frac{\partial^2 Z}{\partial K \partial L}dKdL + \frac{\partial^2 Z}{\partial L^2}dL^2] =$$
$$= \frac{1}{L}[Lf(k) - C]dt + \frac{-K}{L^2}(nLdt + \sigma LdB) + \frac{1}{2}[\frac{2}{L^3}K\sigma^2 L^2 dt] =$$
$$= [f(k(t)) - c(t) - (n - \sigma^2)k(t)]dt - k(t)\sigma dB(s)$$

där $c(t)$ är konsumtionen per capita. Notera att differentialerna dK^2 och $dKdL$ försvinner därför att de förblir andraordningstermer, medan $dL^2 = \sigma^2 L^2 dt$ och den sista termen i slutet av den sista delen av ekvationen står för stokastiken. Notera också att $Lf(k) = Lf(k,1) = F(K,L)$ därför att produktionsfunktionen är homogen av grad ett.

References

Agell, J., Englund, P. and Södersten, J. (1998), *Incentives and Redistribution in the Welfare State,* London, MacMillan.

Ainslie, G. (2002), The Effect of Hyperbolic Discounting on Personal Choices. Keynote Speech to the Thematic Session, "Personal Choice and Change" presented at the Annual Convention of the American Psychological Association at Chicago, IL, August 22, 2002 at 1:00 PM. http://picoeconomics.org/Articles/APA.pdf (Hämtad 2013-06-07).

Aronsson, T., Johansson, P.O. och Löfgren, K.G. (1997), *Welfare measurement, Sustainability and Green Accounting,* Cheltenham: Edvard Elgar.

Aronsson,T., Löfgren, K.G. och Backlund, K. (2004), *Welfare Measurment in Imperfect Markets,* Cheltenham: Edvard Elgar.

Aronsson, T., Löfgren,K.G och Nyström, K. (2003), Stochastic Cost Benefit Rules, A Back of a Lottery Ticket Calculation Method, *Umeå Economic Studies No 606*

Arrow, K.J. (1965), *Aspects of the Theory of Risk-Bearing*, Helsinki, Yrjö Jahnssonin Säätiö.

Arrow, K.J. (2007), Global Climate Change: A Challenge to Policy, *The Economists' Voice, 4, 1-5.* http://www.degruyter.com/view/j/ev.2007.4.3/ev.2007.4.3.1270/ev.2007.4.3.1270.xml (Hämtad 2013-05-10).

Arrow, K.J., Dasgupta, P. and Mäler, K.G. (2003), Evaluating Projects and Assessing Sustainable Development in Imperfect Economies, *Environmental and Resource Economics, 26, 647-85.*

Arrow, K.J., Cropper, M.L., Gollier, C., Groom, B., Heal, G.M., Newell, R.G., Nordhaus, W.D., Pindyck, R.S., Pizer, W.A., Portney, P.R., Sterner, T., Tol, R.S.J., and Weitzman, M.L. (2012), How Should Benefits and Costs be Discounted in an Intergenerational Context?, Washington, D.C., Resources for the Future Discussion Paper 12-53. http://www.rff.org/RFF/Documents/RFF-DP-12-53.pdf (Hämtad 2013-05-11).

Auerbach, A.J. and Hines JR, J.R. (2002), Taxation and Economic Efficiency, In A. Auerbach and M. Feldstein (Eds.), *Handbook of Public Economics,* Vol 3, pp. 1349-1421, Amsterdam, North-Holland.

Auspitz, R. and Lieben R. (1889) *Untersuchungen über die Theorie des Preises*. Leipzig: Verlag von Duncker & Humblot.

Barrios, S., Pycroft, J. and Saveyn, B. (2013), The Marginal Cost of Public Funds in the EU: The Case of Labour Versus Green Taxes, Working Paper N. 35-2013, Luxembourg, Publication Office of the European Union.

Barro, R.J. and Sala-i-Martin, X. (1995), *Economic Growth*, New York, McGraw-Hill, 1st edition.

Bateman, I. J., A. R. Harwood, D. J. Abson, B. Andrews, A. Crowe, S. Dugdale, C. Fezzi, J. Foden, D. Hadley, R. Haines-Young, M. Hulme, A. Kontoleon, P. Munday, U. Pascual, J. Paterson, G. Perino, A. Sen, G. Siriwardena, and M. Termansen (2014). Economic analysis for the UK national ecosystem assessment: Synthesis and scenario valuation of changes in ecosystem services, *Environmental and Resource Economics 57, 273-297*.

Blanchard, O.J. and Fisher, S.(1996), *Lectures on Macroeconomics,* Cambridge, MA, MIT Press,. 1st edition.

Boadway, R.W. (1975) Cost-benefit Rules in General Equilibrium, *Review of Economic Studies, 42.*

Boadway, R.W. and Bruce, N. (1984) *Welfare Economics*, Oxford, Basill and Blackwell

Brock, W (1977), A Polluted Golden Age, in V.L. Smith (ed.), *Economics of Natural and Environmental Resource, New York: Gordon &Breach.*

Burgess, D.F. and Zerbe, R.O. (2011), Appropriate Discounting for Benefit-Cost Analysis, *Journal of Benefit-Cost Analysis* 2, *Issue 2, Article 2*.

Carbone, J.C. and Smith, V.K. (2013). Valuing Nature in General Equilibrium. *Journal of Environmental Economics and Management, 66, 72-89*.

Carbone, J.C. and Smith, V.K. (2010) Valuing Ecosystem Services in General Equilibrium. *National Bureau of Economic Research, WP No. 15844.*

Chiang, A.C. and Wainwright, K. (2005) *Fundamental Methods of Mathematical Economics*, New York: McGraw-Hill.

Cropper, M. (2012), How Should Benefits and Costs be Discounted in an Intergenerational Context?, Washington, D.C., Resources for the Future Discussion Paper 12-42. http://www.rff.org/RFF/Documents/RFF-DP-12-42.pdf (Hämtad 2013-05-11).

Dahlby, B. (2008), The Marginal Cost of Public Funds. Theory and Applications, Cambridge, MA., MIT Press.

Dobes, L. (2008) A Century of Australian Cost-benefit Analysis: Lessons from the Past and Present, Working paper 2008-01, Office of Best Practice Regulation, Department of Finance Deregulation.

Dasgupta, P. (2001) Valuing Objects and Evaluating Policies in Imperfect Economies, *Economic Journal III (Conference Issue),1-19.*

Dasgupta, P., Sen, A. and Marglin, S. (1972) *Guidelines for Project Evaluation*, UNIDO

de Finetti, B. (1952), Sulla Preferibilità, *Giornale degli Economisti e Annali di Economia, 11, 685–709*.

Dixit, A. K. och Pindyck, R.S. (1993) *Investment under Uncertainty,* Princeton: Princeton University Press.

Dreze, J. and Stern, N. (1987) The Theory of Cost Benefit Analysis. In A. Auerbach and M. Feldstein (Eds.), *Handbook of Public Economics*, North-Holland, Amsterdam, NL.

Dupuit, J. (1844) De la Measure de l'Utilite des Travaux Publiques, *Annales des ponts et chausse'es*. Tryckt på engelska 1952 som On the Measurement of the Utility of Public Works, *International Economic Papers*

Dupuit, J. (1849) De l'Influence des Pe'ages sur Utilite' des Voies de Communication, *Annales des ponts et chaussées.*

European Commission (2008), Guide to Cost-Benefit Analysis of Investment Projects, Technical Report, Brussels, DG Regional Policy. http://ec.europa.eu/regional_policy/sources/docgener/guides/cost/guide2008_en.pdf (Hämtad 2012-12-03).

Evans, D.J. (2007), Social Discount Rates for the European Union, in: Florio, M. (ed.) *Cost-Benefit Analysis and Incentives in Evaluation*, Cheltenham, UK, Edward Elgar.

Feldstein, M.S.(1965), The Derivation of Social Discount Rates, *Kyklos, 18, 277–287*.

Fisher,I. (1930)*The Theory of Interest*, New York: Macmillan.

Freeman, M (1990) Water Pollution Policy, in Portney,P.R.(ed.) , *Public Policies for Environmental Protection,* Johns Hopkins University Press, Baltimore.

Frederick, S., Loewenstein, G., and O'Donoghue, T. (2002), Time Discounting and Time Preference: A Critical Review, *Journal of Economic Literature, 40, 351-401*.

Fullerton, D. (1991), Reconciling Recent Estimates of the Marginal Welfare Cost of Taxation, *American Economic Review, 81, 302-308*.

Gahvari, F. (2006), On the Marginal Cost of Public Funds and the Optimal Provision of Public Goods, *Journal of Public Economics, 90, 1251-1262*.

Gollier, C. (2012), *Pricing the Planet's Future: The Economics of Discounting in an Uncertain World*, Princeton, NJ, Princeton University Press, pdf-version 2011: http://idei.fr/doc/by/gollier/pricing_future.pdf (Hämtad 2013-05-14).

Gollier, C. and Weitzman, M.L. (2010), How Should the Distant Future be Discounted when Discount Rates are Uncertain? *Economics Letters, 107, 350-353*.

Groom, B. and Maddison, D. (2013), Estimating the Elasticity of Marginal Utility: Revisions, Extensions and Problems, London, Grantham Research Institute on Climate Change Economics and the Environment, working paper, London School of Economics. Forthcoming.

Haavelmo, T. (1960) *A Study in the Theory of Investment*, Chicago: Chicago University Press.

Hanley, N., and Spash, C.L. (1993), Cost-Benefit Analysis and the Environment, Cheltenham: Edward Elgar.

Hansson, I. (1984), Marginal Cost of Public Funds for Different Tax Instruments and Government Expenditures, *Scandinavian Journal of Economics, 86, 115-130*.

Hansson, I. and Stuart, C. (1985), Tax Revenue and the Marginal Cost of Public Funds in Sweden, *Journal of Public Economics, 27, 331–353*.

Harberger, A.C. (1964) *Taxation. Resource Allocation and Welfare*, in NBER and Brookings Inst., The Rule of Direct and Indirect Taxes in the Federal Revenue System, (Princeton University Press).

Harberger, A.C. (1971) Three Basic Postulates for Applied Welfare Economics. An Interpretive Essay, *Journal of Economic Literature, 9,785-97.*

Harrison, M. (2010), Valuing the Future: The Social Discount Rate in Cost-Benefit Analysis, Visiting Researcher Paper, Canberra AUS, Productivity Commission. http://papers.ssrn.com/sol3/papers.cfm?abstract_id=1599963 (Hämtad 2013-05-16).

Hicks, J. (1939), *Value and Capital*, Oxford: Oxford University Press.

Hicks, J. (1940-41), The Rehabilitation of Consumers' Surplus, *Review of Economic Studies, 8, 108-15.*

Hicks, J (1943) The Four Consumer Surpluses, *Review of Economic Studies, 11, 31-41.*

HM Treasury (2003), The Green Book. Appraisal and Evaluation in Central Government, London, HMSO, Updated in July 2011.

https://www.gov.uk/government/uploads/system/uploads/attachment_data/file/179349/green_book_complete.pdf.pdf (Hämtad 2013-05-19).

Hotelling, H. (1931), The Economics of Exhaustible Resources, *Journal of Political Economy, 39,137-75.*

Hotelling, H. (1932), Edgeworth's Taxation Paradox and the Nature of Supply and Demand, *Journal of Political Economy, 40, 577-616.*

Hotelling, H. (1938), The General Welfare in Relation to Problems of Taxation and of Railway Utility Rates, *Econometrica,6, 242-69.*

Hultkantz, L. (2012), Skattefaktor 1 är död, leve skattefaktor 2. PM till ASEK5, 2012-02-29. http://www.trafikverket.se/PageFiles/51331/pm_till_asek_5_skattefaktor_1_ar_dod_leve_skattefaktor_2.pdf (Hämtad 2013-01-12)

Inada, K.-I. (1963), On a Two-Sector Model of Economic Growth: Comments and a Generalization, *Review of Economic Studies, 30, 119-127*.

Jacobsen Kleven, H. and Thustrup Kreiner, C. (2003), The Marginal Cost of Public Funds in OECD Countries: Hours of Work Versus Labor Force Participation, CESIFO Working Paper 935.

Af Jochnick, W. (1885) Exempel till det Vigtigaste af Differential och Integralräkningen: *Stockholm: P.A. Norstedt och Söner.*

Johansson, P.O.(1987) *The Economic Theory and Measurement of Environmental Benefits:* Cambridge: Cambridge University Press.

Johansson, P.O. (1991) *Introduction to Modern Welfare Economics*, Cambridge: Cambridge University Press.

Johansson, P.-O. (1993) *Cost-Benefit Analysis of Environmental Change*, Cambridge: Cambridge University Press.

Johansson, P.-O. and Kriström, B. (2014) Compact Guide to Project Appraisal, mimeo.

Johansson, P.-O. och Kriström, B. (2013), Hantering av skatter och skattekilar i en samhällsekonomisk lönsamhetsanalys – En modest översikt, Del IV, kapitel 1, i Kriström, B. och Bonta Bergman, M. (red.) Samhällsekonomiska analyser av miljöprojekt – En vägledning, Naturvårdsverket.

Johansson, P.-O., and Kriström, B. (2012), *The Economics of Evaluating Water Projects - Hydroelectricity Versus Other Uses*, Heidelberg DE, Springer Verlag.

Johansson, P.-O. and Kriström, B. (2010), A Note on Cost-Benefit Analysis, the Marginal Cost of Public Funds, and the Marginal Excess Burden of Taxes, *Environmental Economics, 1, 72-77*.

Johansson, P.O. and Löfgren, K.G.(1985) *The Economics of Forestry and Natural Resources*, Oxford: Basil Blackwell.

Johansson, P.O. and Löfgren, K.G. (1987) *Disequilibrium Cost-Benefit Analysis: An Exposition and Extension*, in Folmer, H.and Ierland, E. (eds.) Valuation Methods and Policy Making in Environmental Economics, Amsterdam: Elsevier.

Just, R.E. Hueth, D.L., and Schmitz, A. (2004), *The Welfare of Economics of Public Policy: A Practical Approach to Project and Policy Evaluations,* Cheltenham, Edward Elgar.

Kaldor, N. (1939) Welfare Propositions of Econoimics and Intertemporal Comparisons of Utility, *The Economic Journal 49, 549-552.*

Kodukula, P. och Papudesu, C. (2006) *Project Valuation using Real Options; A Practitioner's Guide*, Fort Lauderdale, FL: J. Ross Publishing.

Layard, R., Muyraz, G., and Nickell, S.J. (2008), The Marginal Utility of Income, *Journal of Public Economics, 92, 1846–1857*.

Lesourne, J. (1972) *Le Calcul Economique*, Paris: Dunod.

Lesourne, J. (1975) *Cost-Benefit Analysis and Economic Theory*, North Holland, Amsterdam, NL.

Li, Chuan-Zhong och Löfgren, K.G. (2008) Evaluating Projects in a Dynamic Economy: Some Envelope Results, *German Economic Review, 9, 1-16.*

Lundholm, M. (2005), Marginalkostnaden för allmänna medel och skuggpriser för resursanvändning i offentlig kostnads-intäktsanalys, SIKA PM 2005-05-22.

Mas-Colell, A., Whinston, M., Green J (1995), *Microeconomic Theory*, Oxford: Oxford University Press

Mc Donald, R och Siegel, D. (1986) The Value of Waiting to Invest, *Quaterly Journal of Economics, 101, 331-49.*

Merton, R. (1975), An Asymptotic Theory of Growth under Uncertainty, *Review of Economic Studies, 42, 375-93.*

Mill, J.S. (1848), *Principles of Political Economy with some of their Applications to Social Philosophy*, (ed. William James Ashley), London, Longmans, Green and Co. (7th edition, 1909).

Montesano, A. (2008), De Finetti and the Arrow-Pratt Measure of Risk Aversion, in Galavotti, M.C. (ed.) *Bruno de Finetti Radical Probabilist*, London, College Publications.

Morey, E.R. (1984), Confuser Surplus, *American Economic Review, 74, 345-71.*

Musgrave, R.A. and Musgrave, P.B. (1984*), Public Finance in Theory and Practice*, New York, McGraw Hill Book Company, 4th edition.

Nordhaus, W.D. (2007), A Review of the Stern Review on the Economics of Climate Change, *Journal of Economic Literature, 45, 686-702*.

Norges finansdepartement (2013), Statens pensjonsfond utland. http://www.regjeringen.no/nb/dep/fin/dep/underliggende_etater/statens-pensjonsfond---utland.html?id=270410 (Hämtad 2013-05-19).

NOU, Norges offentlige utredninger (2012,) Samfunnsøkonomiske analyser. Utredning fra et utvalg oppnevnt ved kongelig resolusjon 18. februar 2011, Oslo NO, NOU 2012:16. http://www.regjeringen.no/nb/dep/fin/dok/nouer/2012/nou-2012-16.html?id=700821 (Hämtad 2013-05-19).

Pareto, V. (1896-1897), *Cours d' économique politique professé á l'université Lausanne*. Rouge/Pichon, Paris, FR.

Pearce, D., Atkinson, G., and Mourato, S. (2006), Cost-Benefit Analysis and the Environment. Recent Developments, OECD, Paris, FR.

Phelps, E. S., and Pollak, R.A. (1968), On Second-Best National Saving and Game-Equilibrium Growth, *Review of Economic Studies, 35,185-199*.

Pigou, A.C. (1920), *The Economics of Welfare,* Cambridge: Cambridge University Press.

Pratt, J.W. (1964), Risk Aversion in the Small and in the Large, *Econometrica, 32, 122-136*.

Puu, T.(1964) *Det optimala tillgångsvalets teori*, Stockholm: Almqvist & Wiksell.

Pye, G. (1966) Present Values for Imperfect Capital Markets, *Journal of Business, 39, (Jan.66)*

Ramsey, F. (1927), A Contribution to the Theory of Taxation, *Economic Journal, 37, 47-61*.

Roy.R (1947) La Distribution Du Revenue Entre Les Divers Bien, *Econometrica 15, 205-25.*

Shephard, R. (1953) *Cost and Production Functions*, Princeton, Princeton University Press

Skatter Miljö och Sysselsättning, *SOU 1997:11*

Solow, R.M. (1986), On the Intergenerational Allocation of Natural Resources, *Scandinavian Journal of Economics 88, 141-149*.

Soman, D., Ainslie, G., Frederick, S., Li, X., Lynch, J., Moreau, P., Mitchell, M., Read, D., Sawyer, A., Trope, Y., Wertenbroch, K., and Zauberman, G. (2005), Why are Distant Events Valued Differently from Proximal Ones? *Marketing Letters, 16, 347–360*.

Stern, Sir N. (2007), *The Economics of Climate Change. The Stern Review*, Cambridge, UK, Cambridge University Press.

Strotz, R. H. (1955-56), Myopia and Inconsistency in Dynamic Utility Maximization, *Review of Economic Studies 23, 165-180*.

Stuart, C. (1984), Welfare Costs per Dollar of Additional Tax Revenue in the United States, *American Economic Review 74, 352-362*.

Sydsaeter, K., Hammond, P. Seierstad, A och Ström, A. (2008) *Further Mathematics for Economic Analysis,* London: Prentice Hall

Tobin, J (1969), A General Equilibrium Approach to Monetary Theory, *Journal of Money Credit and Banking 1, 15-29.*

Uzawa, H. (1963), On a Two Sector Model of Economic Growth II, *Review of Economic Studies* 30, 105-118.

Valentim, J. and Prado, J.M. (2008), Social Discount Rates, Technical Report, SSRN.com. Http://ssrn.com/abstract=1113323 (Hämtad 2012-11-28).

Varian, H. (1992), *Microeconomic Analysis,* 3rd edition, New York: Norton.

Warming, J.(1911), Om Grundrente af Fiskegrunde, *Nationalökonomisk Tidskrift 49, 499-505.*

Weitzman, M.L. (2007), A Review of the Stern Review on the Economics of Climate Change, *Journal of Economic Literature 45, 703–724*.

Weitzman, M.L. (2001), Gamma Discounting, *American Economic Review 91, 260–271*.

Weitzman, M.L. (1976), On the Welfare Significance of National Product in a Dynamic Economy, *Quarterly Journal of Economics 90, 156-162.*

Zerbe Jr., R.O. (2007), The Legal Foundations of Cost- Benefit Analysis, *Charleston Law Review 2, 93-184.*